Εισαγωγή πάνω στα Δυναμικά Συστήματα, το Χάος και Εφαρμογές

Προύσαλης Δημήτριος-Λαυρέντιος

Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμήμα Μαθηματικών

14 Μαΐου 2019

Περιεχόμενα

1 Δυναμικά Συστήματα
- Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
- Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων
- Νέες Θεωρίες πάνω στα Δυναμικά συστήματα
- Εφαρμογή σε Κυκλώματα

2 Παράδειγματα
- Hyperjerk σύστημα
- Νευρομορφικά κυκλώματα

3 Εφαρμογές

Περιεχόμενα

1 Δυναμικά Συστήματα
- Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
- Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων
- Νέες Θεωρίες πάνω στα Δυναμικά συστήματα
- Εφαρμογή σε Κυκλώματα

2 Παράδειγματα
- Hyperjerk σύστημα
- Νευρομορφικά κυκλώματα

3 Εφαρμογές

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Ένα Δυναμικό σύστημα στο E ορίζεται ως μία ροή ή απεικόνιση C^1

$$\phi : R \times E \to U,$$

όπου U είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathfrak{R}^n$ και εάν $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ τότε η ϕ_t ικανοποιεί τις:

1. $\phi_0(x) = x, \forall x \in E$
2. $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x), \forall s, t \in \mathfrak{R}$ και $x \in E$

όπου ϕ_t είναι η λύση του συστήματος.

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Βασικές Κατηγορίες Δυναμικών Συστημάτων

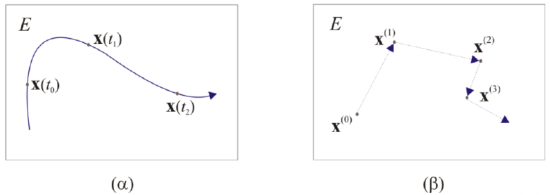
Διακριτά	Συνεχή
Γραμμικά	Μη Γραμμικά
Αυτόνομα	Μη Αυτόνομα
Διατηρητικά	Μη Διατηρητικά
Μονοδιάστατα	Πολυδιάστατα
Αιτιοκρατικά	Στοχαστικά

- Συνεχή Δυναμικά Συστήματα

$$\dot{x}_i = f(x_i, t) \quad x_i = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



Χρονική εξέλιξη στο χώρο φάσεων (σχηματικά) για (α) συνεχές και (β) διακριτό σύστημα.

Διατηρητικά και μη διατηρητικά συστήματα

Έστω ένα σύστημα:

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, t), \quad i, j = 1, ..., n.$$

και D ένα φραγμένο και συνεχές υποσύνολο του χώρου φάσεων E με όγκο:

$$V_D = \int \int_{D \subset R^n} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

- $\mathrm{div} f = 0 \implies \frac{dV}{dt} = 0$: διατηρητικό σύστημα (area preserving)
- $\mathrm{div} f < 0 \implies \frac{dV}{dt} < 0$: σύστημα με απώλειες ή απωλεστικό (dissipative)
- $\mathrm{div} f > 0 \implies \frac{dV}{dt} > 0$: "εκρηκτικό σύστημα" (explosive).

Μη γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

Έστω ένα μη γραμμικό αυτόνομο δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = f(x)$$

και $x(t)$ η μοναδική λύση του συστήματος για την αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$.
Σημεία Ισορροπίας $\dot{x}_j = f_j(x_i) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Το γραμμικοποιημένο αυτόνομο δυναμικό σύστημα :

$$\dot{x} = Ax$$

όπου ο πίνακας $A = Df(x_0)$.

Ευστάθεια στο μη γραμμικό σύστημα

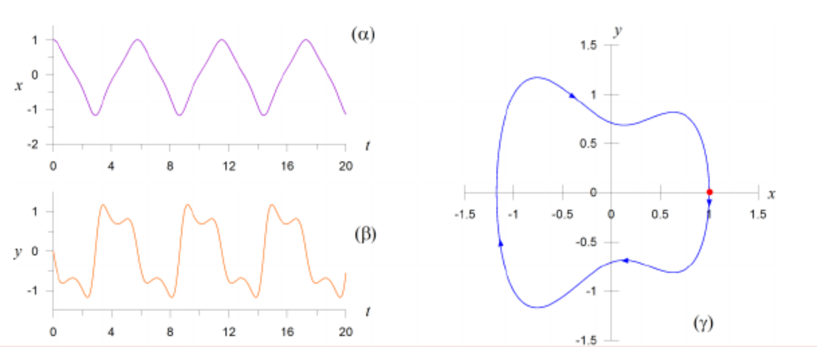
Σημεία ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος:

- $Re\lambda_i < 0$ τότε το σημείο ισορροπίας x_0 μπορεί να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (καταβόθρα)
- $Re\lambda_i > 0$ τότε το σημείο ισορροπίας x_0 μπορεί να είναι ασυμπτωτικά ασταθές (πηγή).
- Ένα σημείο ισορροπίας x_0 μπορεί να είναι σάγμα, εάν έστω μία ιδιοτιμή έχει αρνητικό πραγματικό μέρος και μια θετικό πραγματικό μέρος.

Ελκυστές (attractors), τα σημεία ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος που έλκουν τις τροχιές, $divf < 0$.
Απωθητής (repeller), όταν οι τροχιές που ξεκινούν από μια γειτονιά του σημείου ισορροπίας, απομακρύνονται από αυτό, το σημείο ονομάζεται και θα είναι $divf > 0$.
Ένα διατηρητικό σύστημα δεν μπορεί να έχει ούτε ελκυστές ούτε απωθητές.

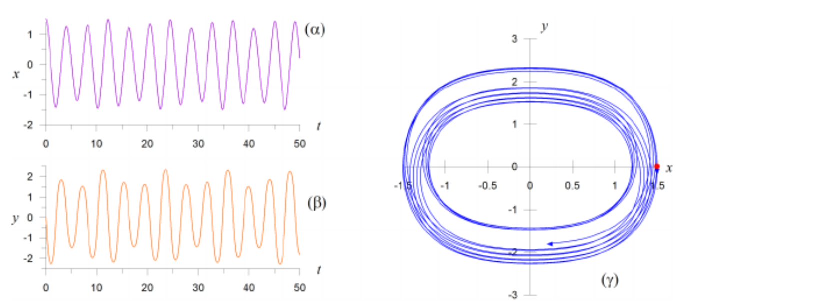
Κατηγοριοποίηση τροχιών

- περιοδική



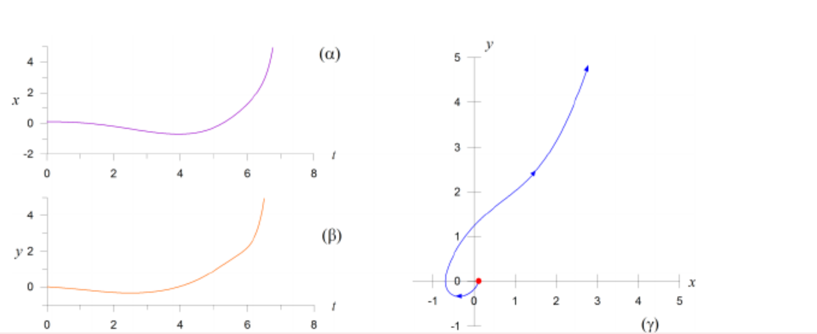
Κατηγοριοποίηση τροχιών

- περατωμένη



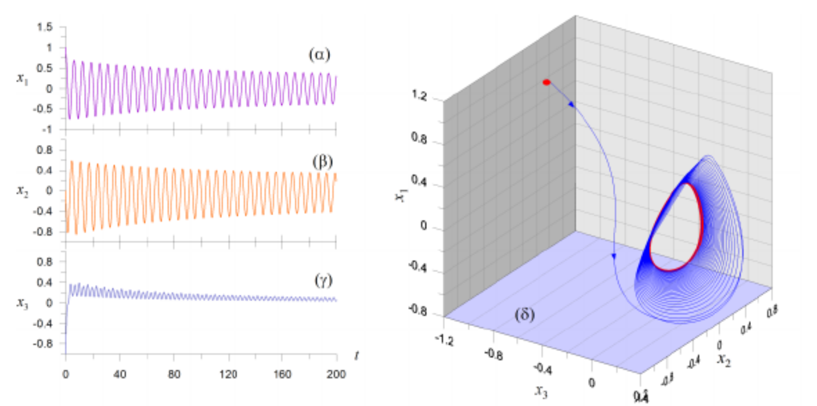
Κατηγοριοποίηση τροχιών

- ανοιχτή



Κατηγοριοποίηση τροχιών

- ασυμπτωτική



Τρόπος Μελέτης

Επιλογή Συστήματος

↓

Κατηγοριοποίηση του Συστήματος και ποιοτική Μελέτη του

↓

Εύρεση Σημείων Ισορροπίας και Γραμμικοποίηση γύρω από αυτά

↓

Μελέτη της Ευστάθειας των Σημείων Ισορροπίας

↓

Αριθμητική Επίλυση του Συστήματος

Περιεχόμενα

1 Δυναμικά Συστήματα
- Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
- Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων
- Νέες Θεωρίες πάνω στα Δυναμικά συστήματα
- Εφαρμογή σε Κυκλώματα

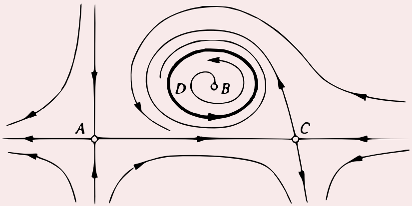
2 Παράδειγματα
- Hyperjerk σύστημα
- Νευρομορφικά κυκλώματα

3 Εφαρμογές

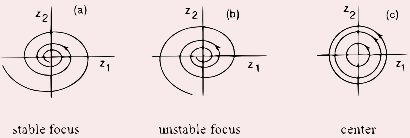
Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων

- Φασικά πορτραίτα
- Απεικονίσεις Poincaré
- Διαγράμματα Διακλαδώσης
- Εκθέτες Lyapunov και Χάος

Φασικά πορτραίτα

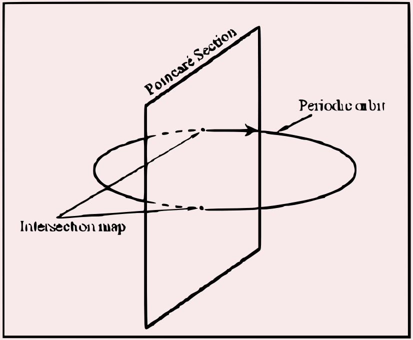


Σχήμα: Φασικό Διάγραμμα.

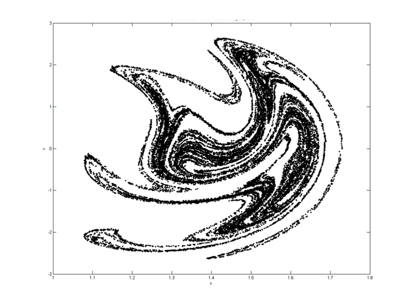


Σχήμα: Παραδείγματα Φασικών Διαγραμμάτων.

Απεικονίσεις Poincaré



Σχήμα: Τομή Poincaré περιόδικής τροχιάς.



Σχήμα: Τομή Poincaré χαοτικής τροχιάς της εξίσωσης Duffing.

Απεικονίσεις Poincaré

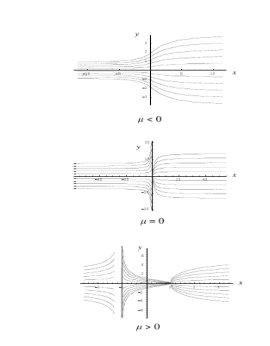
Πεπερασμένος Αριθμός Σημείων	Περιοδική ταλάντωση
Κλειστή Καμπύλη	Ψευδοπεριοδική ταλάντωση
Οργανωμένο Σύνολο σημείων που παρουσιάζει αυτομοιότητα	Παράξενος Ελκυστής στον τρισδιάστατο χώρο
Ανοργάνωτο σύνολο Σημείων	Παράξενος Ελκυστής, σε σύστημα με πολύ μικρή απόσβεση, Παράξενος Ελκυστής σε χώρο φάσεων με περισσότερες από τρεις διαστάσεις

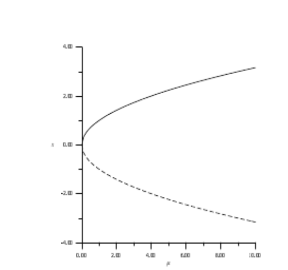
Πίνακας: Ταξινόμηση των Απεικονίσεων Poincaré

Διακλαδώσεις

Ορισμοί διακλαδώσεων

- Διακλάδωση Σάγματος-Κόμβου, (*Saddle* – *Node*)

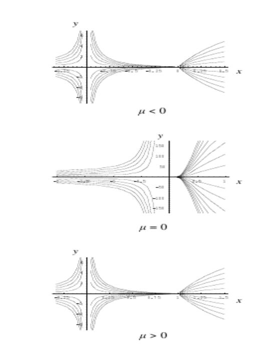


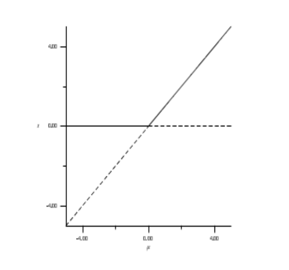


Διακλαδώσεις

Ορισμοί διακλαδώσεων

- Υποκρίσιμη Διακλάδωση, (*transcritical*)

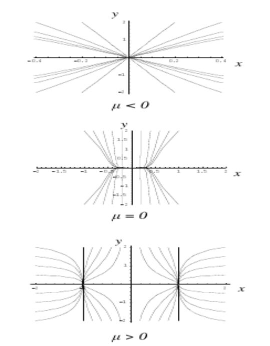


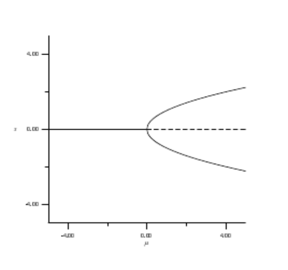


Διακλαδώσεις

Ορισμοί διακλαδώσεων

- Διακλάδωση δικάλας, (*Pitchfork*).

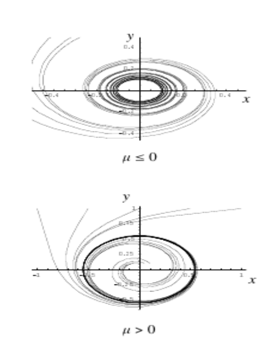




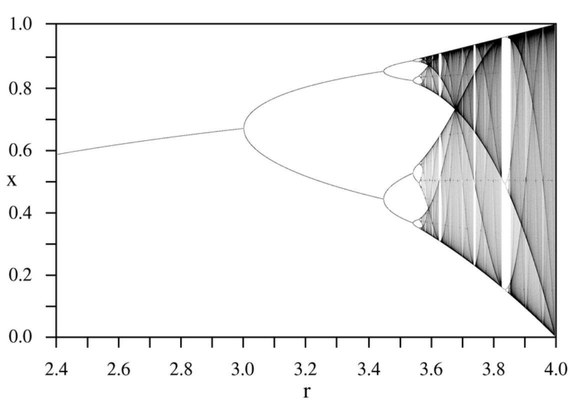
Διακλαδώσεις

Ορισμοί διακλαδώσεων

- Διακλάδωση *Hopf*

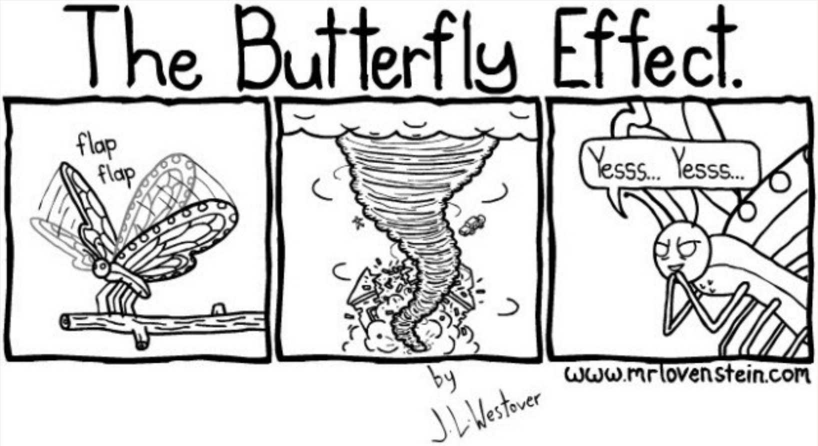


Διαγράμματα Διακλάδωσης

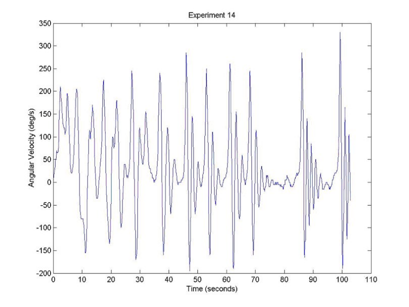


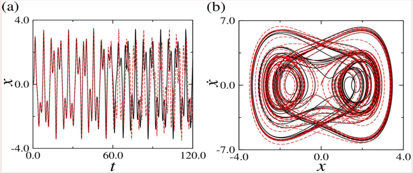
Σχήμα: Διάγραμμα Διακλάδωσης της Λογιστικής Απεικόνισης

Χάος

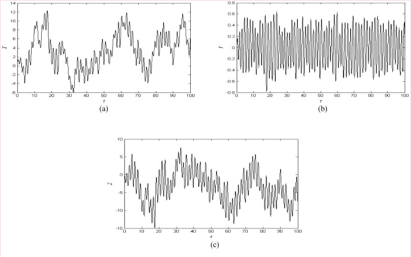

The Butterfly Effect.
flap
flap
Yesss... Yesss...
by J.L.Westover
www.mrlovenstein.com

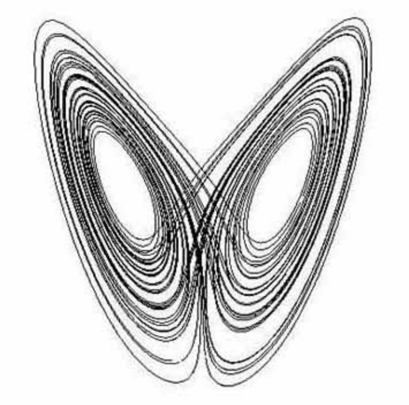
Χάος


Experiment 14
Angular Velocity (deg/s)
Time (seconds)
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110


(a)
(b)
4.0
0.0
-4.0
0.0
60.0
120.0
x
t
7.0
0.0
-7.0
-4.0
0.0
4.0
ẋ
x

Χάος





Χάος

Δεν υπάρχει κανένας γενικά αποδεκτός ορισμός για το χάος αλλά τα ακόλουθα χαρακτηριστικά σχεδόν πάντα παρουσιάζονται με τις λύσεις των χαοτικών συστημάτων:

1. να έχουν πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών,
2. να είναι τοπολογικά μεταβατικές,
3. να έχουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

Devaney, 1989.

Εκθέτες Lyapunov και Χάος

Ο εκθέτης Lyapunov: μέτρο της ευαισθησίας της εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες.
Ο $i-$οστός μονοδιάστατος εκθέτης Lyapunov ορίζεται ως συνάρτηση του μήκους του κύριου άξονα $p_i(t)$ του ελλειψοειδούς.

$$\lambda_i = lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} Ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$$

Για ένα σύστημα $n-$διαστάσεων ισχύει:

- σταθερό σημείο: $\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$
- οριακός κύκλος: $\lambda_1 = 0$
- τοροειδές: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- παράξενος ελκυστής: $\lambda_1 > 0$, τουλάχιστον

Περιεχόμενα

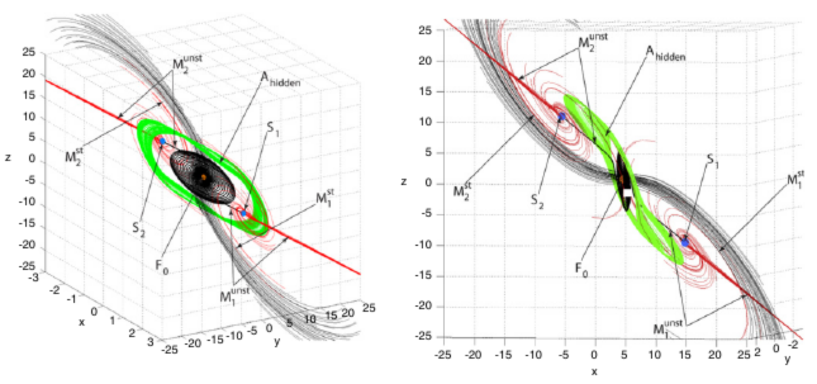
1 Δυναμικά Συστήματα
- Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
- Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων
- Νέες Θεωρίες πάνω στα Δυναμικά συστήματα
- Εφαρμογή σε Κυκλώματα

2 Παράδειγματα
- Hyperjerk σύστημα
- Νευρομορφικά κυκλώματα

3 Εφαρμογές

Κρυφοί Ελκυστές-Hidden Attractors

Η λεκάνη ελξης ενός κρυφού ελκυστή δεν ενώνεται με κανένα σημείο ισορροπίας.



Κρυφοί Ελκυστές-Hidden Attractors

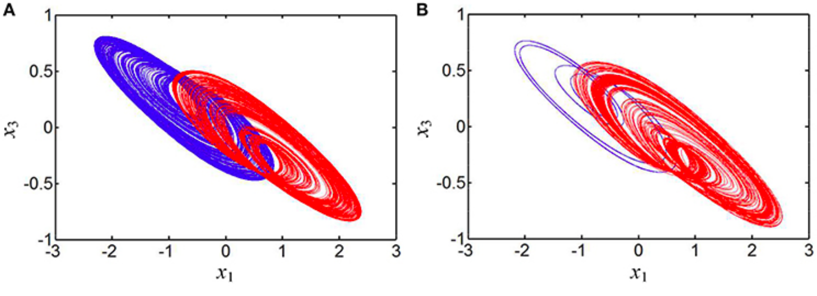
Η λεκάνη ελξης ενός κρυφού ελκυστή δεν ενώνεται με κανένα σημείο ισορροπίας.

Τέσσερις κύριες κατηγορίες κρυφών ελκυστών:

- σε δυναμικά συστήματα χωρίς σημεία ισορροπίας,
- με ένα μόνο ευσταθές σημείο,
- με άπειρα σημεία ισορροπίας πάνω σε μια γραμμή,
- με αναρίθμητα πολλά σημεία ισορροπίας πάνω σε επιφάνεια.

Πολλαπλή Ευστάθεια-Multistability

- Η πολυευστάθεια (Multistability): πολλαπλά ευσταθή σημεία.
- Άπειροι ελκυστές $\Rightarrow$ extreme multistability. Εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.



Περιεχόμενα

1 Δυναμικά Συστήματα
- Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
- Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων
- Νέες Θεωρίες πάνω στα Δυναμικά συστήματα
- Εφαρμογή σε Κυκλώματα

2 Παραδείγματα
- Hyperjerk σύστημα
- Νευρομορφικά κυκλώματα

3 Εφαρμογές

Κύκλωμα ⇔ Μαθηματικό Μοντέλο

Εφαρμογή των κανόνων του Kirchoff

1ος Νόμος, Νόμος των Ρευμάτων

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

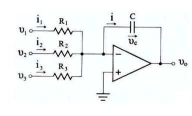
$$i_C = \frac{dq}{dt} = C_1 \frac{dV}{dt}$$

2ος Νόμος, Νόμος των Τάσεων

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = 0$$

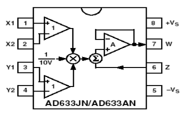
$$v_L = \frac{di_L}{dt}$$

- *Αθροιστικός αναστροφικός ολοκληρωτής*



$$\upsilon_0(t) = -\frac{1}{R_1 C}\int_0^t \upsilon_1 dt - \frac{1}{R_2 C}\int_0^t \upsilon_2 dt - \frac{1}{R_3 C}\int_0^t \upsilon_3 dt$$

- *Πολλαπλασιαστές*



$$W = \frac{(X1-X2)(Y1-Y2)}{10V} + Z$$

Τρόπος Μελέτης

Επιλογή Συστήματος

↓

Θεωρητική Ανάλυση του Συστήματος

↓

Επίλυση μεσω αριθμητικών Προσομοιώσεων

↓

Σχεδίαση Κυκλώματος

↓

Υλοποίηση Κυκλώματος

Περιεχόμενα

1 Δυναμικά Συστήματα
- Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
- Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων
- Νέες Θεωρίες πάνω στα Δυναμικά συστήματα
- Εφαρμογή σε Κυκλώματα

2 Παράδειγματα
- Hyperjerk σύστημα
- Νευρομορφικά κυκλώματα

3 Εφαρμογές

Ένα 4-διάστατο Hyperjerk σύστημα με κρυφούς ελκυστές

Το νέο Hyperjerk σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= z\\ \dot{z} &= w\\ \dot{w} &= -z - aw - bz^2 w - g\end{aligned}$$

όπου $g(y,x) = g = (1+x)y$
Ως *Jerk* σύστημα γράφεται

$$\ddddot{x} = -\ddot{x} - \dddot{x} - b(\ddot{x})^2\dddot{x} - (1+x)\dot{x}$$

Ένα 4-διάστατο Hyperjerk σύστημα με κρυφούς ελκυστές

Τα σημεία ισορροπίας:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 0 \\ w &= 0 \\ -z - aw - bz^2 w - g &= 0 \end{aligned}$$

Άπειρα σημεία ισορροπίας για κάθε τιμή των a, b πάνω σε μία ευθεία γραμμή $E(x, 0, 0, 0)$.
Απωλεστικό σύστημα $\nabla V < 0$.

Ένα 4-διάστατο Hyperjerk σύστημα με κρυφούς ελκυστές

Οι ιδιοτιμές του **J** είναι:

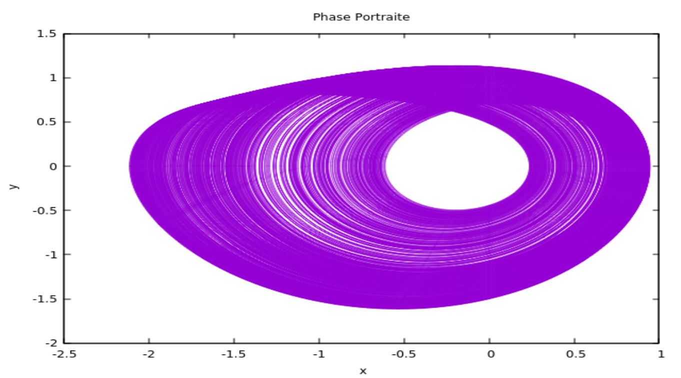
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -0.167 - 1.833/R + 0.167R \\ \lambda_3 = -0.167 + (0.9167 - 1588i)/R - (0.083 + 0.144i)R \\ \lambda_4 = -0.167 + (0.9167 + 1588i)/R - (0.083 - 0.144i)R \end{pmatrix} \tag{1}$$

όπου,

$$R = \left(-91 - 108x + 10.3923\sqrt{89 + x(182 + 108x)}\right)^{1/3} \tag{2}$$

Ένα 4-διάστατο Hyperjerk σύστημα με κρυφούς ελκυστές

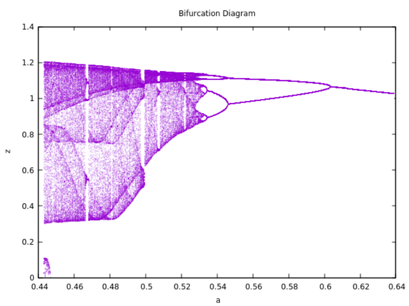
Φασικό Πορτραίτο για $a = 0.5$, $b = 0.1$.



Ένα 4-διάστατο Hyperjerk σύστημα με κρυφούς ελκυστές

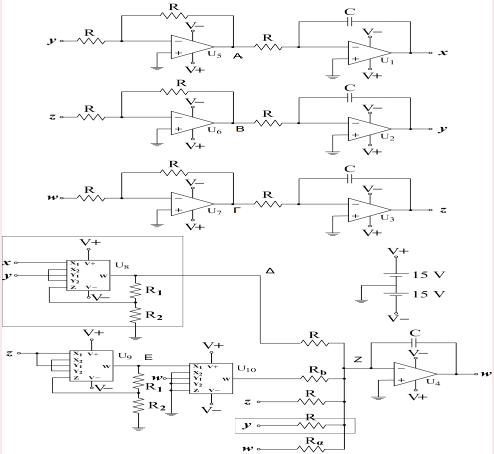
Απωλεστικό σύστημα $\nabla V < 0$. Άπειρα σημεία ισορροπίας πάνω σε μία ευθεία γραμμή $E(x, 0, 0, 0)$. Ύπαρξη κρυφών ελκυστών.

Ως προς την παράμετρο a για $b = 0.1$.

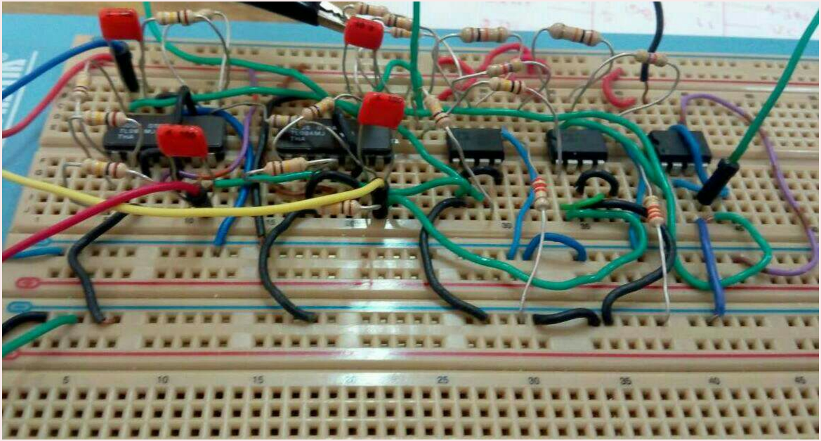


a	**περιγραφή**
$0.64 > a > 0.604$	π(1)
$0.604 > a > 0.547$	π(2)
$0.547 > a > 0.533$	π(4)
$0.533 > a > 0.5280$	π(8)
$0.5280 > a > 0.4650$	Χάος
$0.4649 > a > 0.4641$	π
$0.4640 > a > 0.4400$	Χάος

Η κυκλωματική υλοποίηση του Hyperjerk συστήματος

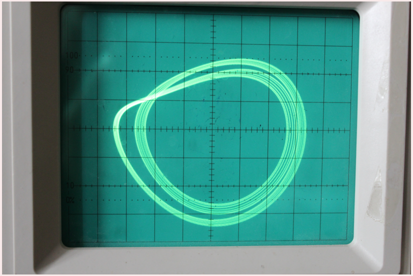


Η κυκλωματική υλοποίηση του Hyperjerk συστήματος

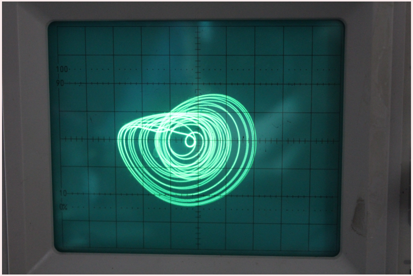


Η κυκλωματική υλοποίηση του Hyperjerk συστήματος

Εικόνες από τον παλμογράφο



$X - Y$ για $a = 10, b = 1$



$X - Y$ για $a = 0.25, b = 1$

$X : 1V/div, Y : 1V/div$

Συγχρονισμός

Το νέο Hyperjerk σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= w \\ \dot{w} &= -z - aw - bsin(z)w - g \end{aligned}$$

όπου $g(y,x) = g = (1-x)y$ $a, b > 0$. Ως *Jerk* σύστημα γράφεται

$$x^{(4)} = -\ddot{x} - a\dddot{x} - bsin(\ddot{x})\dddot{x} - (1-x)\dot{x}$$

Το σχήμα του προσαρμοστικού συγχρονισμού ενός συζευγμένου ζευγαριού δύο Hyperjerk συστημάτων

α)Το πρώτο

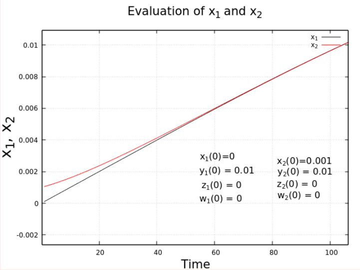
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1\\ \dot{y}_1 &= z_1\\ \dot{z}_1 &= w_1\\ \dot{w}_1 &= -z_1 - aw_1 - bsin(z_1)w_1 - (1 - x_1)y_1\end{aligned}$$

όπου x_1, y_1, z_1, w_1 είναι οι καταστάσεις του συστήματος και οι a, b είναι οι άγνωστες παράμετροι. β)Το δεύτερο

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= y_2 + u_1\\ \dot{y}_2 &= z_2 + u_2\\ \dot{z}_2 &= w_2 + u_3\\ \dot{w}_2 &= -z_2 - aw_2 - bsin(z_2)w_2 - (1 - x_2)y_2 + u_4\end{aligned}$$

όπου x_2, y_2, z_2, w_2, οι καταστάσεις του συστήματος, u_i οι backstepping ελεγκτές.

Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $a = 0.55$, $b = 0.2$



Περιεχόμενα

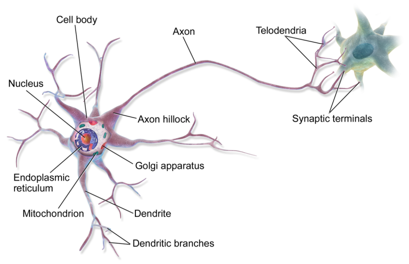
1 Δυναμικά Συστήματα
- Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
- Χρήσιμα Εργαλεία της Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων
- Νέες Θεωρίες πάνω στα Δυναμικά συστήματα
- Εφαρμογή σε Κυκλώματα

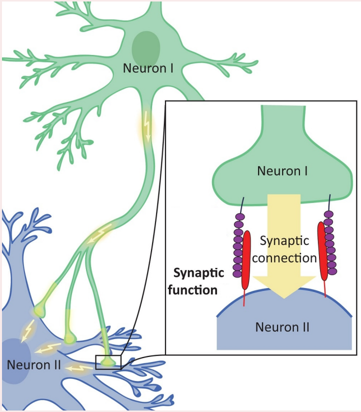
2 Παράδειγματα
- Hyperjerk σύστημα
- Νευρομορφικά κυκλώματα

3 Εφαρμογές

Νευρομορφικά κυκλώματα

Οι νευρώνες είναι το βασικό συστατικό του νευρικού συστήματος.Αυτό το οποίο κάνει τους νευρώνες να ξεχωρίζουν, είναι η επικοινωνία μεταξύ τους μέσω του δυναμικού της μεμβράνης τους.





Νευρομορφικά κυκλώματα

Σε αυτό το μέρος επιλέχθηκε να μελετηθεί το μοντέλο FitzHugh-Nagumo (FN)

$$\dot{x} = x - \frac{1}{3}x^3 - y + u_s$$
$$\dot{y} = c(x + a - by)$$

όπου x το δυναμικό της μεμβράνης,
y ένας συνδυασμός των αγωγιμοτήτων των διαφορετικών καναλιών των ιόντων.
u_s η ένταση του εξωτερικού ερεθίσματος.

Το συζευγμένο σύστημα

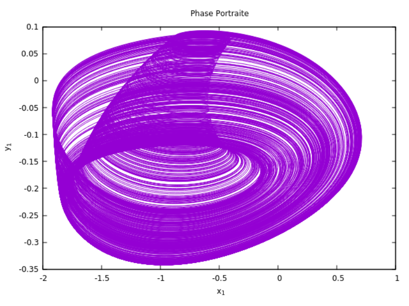
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(1-\epsilon) - \tfrac{1}{3}x_1^3 - y_1 + u_s - f(x_1 - x_2) \\
\dot{y}_1 &= c(x_1 + a - by_1) \\
\dot{x}_2 &= x_2 - \tfrac{1}{3}x_2^3 - y_2 + f(x_1 - x_2) \\
\dot{y}_2 &= c(x_2 + a - by_2) \\
\dot{w} &= x_1 - x_2
\end{aligned}$$

όπου $f = (k + mw^2 - pw^4)$. Στην μονόδρομη σύζευξη ο όρος $f(x_1 - x_2)$ δεν υπάρχει

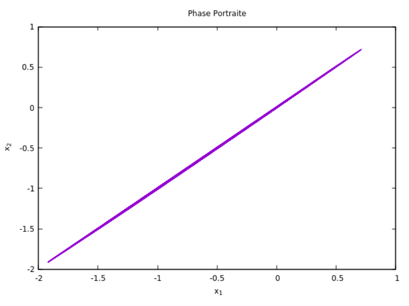
Φαινόμενα Συγχρονισμού σε Συζευγμένο Μοντέλο Νευρώνων

Μονόδρομη σύζευξη για τις τιμές των παραμέτρων $a = 0.7$, $b = 0.8$, $\epsilon = 0.16$, $m = 1$, $p = 0.0002$, $U_0 = 0.9$, $\nu = 0.16$

Φασικό Πορτραίτο για $k = 0.25$ και $U_{DC} = 0$



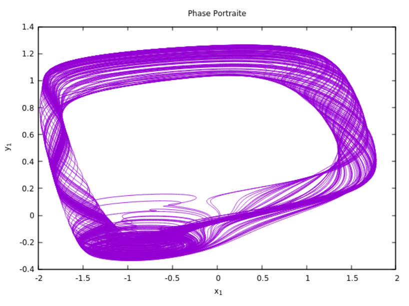
Φασικό Πορτραίτο για $k = 0.25$ και $U_{DC} = 0$



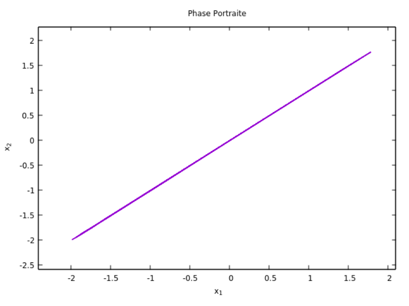
Φαινόμενα Συγχρονισμού σε Συζευγμένο Μοντέλο Νευρώνων

Αμφίδρομη σύζευξη για τις τιμές των παραμέτρων
$a = 0.7, b = 0.8, \epsilon = 0.16, m = 1, p = 0.0003, U_0 = 0.716, \upsilon = 0.16$

Φασικό Πορτραίτο για $k = 0.3$ και $U_{DC} = 0.6$



Φασικό Πορτραίτο για $k = 0.25$ και $U_{DC} = 0$



Εφαρμογές

- γεωλογία
- βιολογία
- οικονομικά, χρηματοοικονομικά,
- μετεωρολογία
- πληθυσμιακή δυναμική
- Image Encryption
- Ασφαλείς Επικοινωνίες
- Chaotic Path Planning
- ρομποτική, (BEAM robotics).
- Random Bit Generator

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

Abell, M.L. and Braselton, J.P., 1997. Differential equations with Mathematica. 2nd ed. Academic Press.

Arrowsmith, D.K. and Place, C.M., 1990. An Introduction to Dynamical Systems. New York: Cambridge University Press.

Hilborn, R.C., 1994. Chaos and Nonlinear Dynamic. New York: Oxford University Press.

Guckenheimer, J. and Holmes, P., 1997. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.

Ott, E., 2002. Chaos in Dynamical Systems. 2nd ed. New York: Cambridge University Press.

Sagdeev, R.Z., Usikov, D.A. and Zaslavsky, G.M., 1988. Nonlinear Physics: from pendulum toturbulence and chaos. Chur-Switzerland: Harwood Academic publ.

Tabor M., 1989. Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction. New York: Wiley.

Wiggins, S., 1990. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Dover.

Βουγιατζής, Γ.Β., Μπόζης, Γ.Δ. και Παπαδόπουλος, Δ.Β., 2012. Διαφορικές Εξισώσεις και εφαρμογές, Αθήνα: Κλειδάριθμος. Πνευματικός, Σπ., 2006. Κλασσική Μηχανική. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικού.

Ευχαριστώ Πολύ