ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΙΙ
Σημειώσεις

Γεώργιος Ραχώνης
Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Θεσσαλονίκη, 2024

Περιεχόμενα

Εισαγωγή **4**

1 Πεπερασμένα αυτόματα **6**
1.1 Γλώσσες 6
1.2 Πεπερασμένα αυτόματα 9
1.3 Δύο ιδιότητες της κλάσης των αναγνωρίσιμων γλωσσών 21

2 Μοναδιακή λογική δεύτερης τάξης **24**

3 Λογική πρώτης τάξης **42**

4 Γραμμική χρονική λογική **45**

5 Star-free γλώσσες **59**

6 Counter-free πεπερασμένα αυτόματα **61**

7 Εφαρμογές **68**

Βιβλιογραφία **69**

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές έχουν σκοπό να υποστηρίξουν τη διδασκαλία του μαθήματος ''Θεωρητική Πληροφορική ΙΙ'', του οποίου η ύλη αλλάζει από το ακαδημαϊκό έτος 2023–2024.

Η *Θεωρητική Πληροφορική* είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με προβλήματα που αναφύονται στην επιστήμη της Πληροφορικής. Στο μάθημα αυτό, ως συνέχεια της Θεωρητικής Πληροφορικής Ι, θα ασχοληθούμε με την συσχέτιση των απλούστερων μαθηματικών μοντέλων των αλγορίθμων, δηλαδή των πεπερασμένων αυτομάτων, με το αντικείμενο της λογικής. Παρά το θεωρητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει αυτή η συσχέτιση, συνδέεται άμεσα με πολύ σημαντικές εφαρμογές. Ενώ μια αναγνωρίσιμη γλώσσα ''ορίζεται αλγοριθμικά'' από ένα πεπερασμένο αυτόματο, με τη βοήθεια της λογικής περιγράφονται τα χαρακτηριστικά της δομής των λέξεών της. Για παράδειγμα, οι λέξεις της γλώσσας abA^*c από το αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$, είναι όλες εκείνες οι λέξεις που το πρώτο γράμμα τους είναι a, το δεύτερο είναι b, και το τελευταίο είναι c.
Η χρήση της λογικής ως εργαλείο περιγραφής της δομής των λέξεων των γλωσσών οδήγησε στην ανάπτυξη του *model checking*, το σημαντικό πεδίο της Θεωρητικής Πληροφορικής που ασχολείται με την εύρεση (λογικών) λαθών στο software και το hardware. Την αυστηρή μαθηματική θεμελίωση αυτού του πεδίου οφείλουμε στους Edmund Melson Clarke, E. Allen Emerson, και Joseph Sifakis, οι οποίοι τιμήθηκαν το 2007 με το βραβείο Turing για την σημαντική τους αυτή συνεισφορά στην επιστήμη της Πληροφορικής [13].

Στο μάθημα αυτό θα επαναλάβουμε σύντομα, από την Θεωρητική Πληροφορική Ι, τις έννοιες των πεπερασμένων αυτομάτων, των αναγνωρίσιμων γλωσσών και τις ιδιότητες τους. Θα δώσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό των πεπερασμένων αυτομάτων που θα είναι πιό εύχρηστος σε κάποιες κατασκευές και θα αποδείξουμε δύο ακόμη ιδιότητες της κλάσης των αναγνωρίσιμων γλωσσών.

Στη συνέχεια θα εισάγουμε την μοναδιακή λογική δεύτερης τάξης (monadic second-order logic) και θα δείξουμε την εκφραστική ισοδυναμία των προτάσεών της με τα πεπερασμένα αυτόματα.

Θα μελετήσουμε επίσης την λογική πρώτης τάξης (first-order logic). Η εκφραστική ισχύς των προτάσεων της είναι ''ασθενέστερη'' από αυτήν των πεπερασμένων αυτομάτων.

Το επόμενο αντικείμενο που θα παρουσιάσουμε είναι η γραμμική χρονική λογική (linear temporal logic). Θα αποδείξουμε ότι κάθε γλώσσα που ορίζεται από έναν τύπο της γραμμικής χρονικής λογικής μπορεί επίσης να ορισθεί από πρόταση της λογικής πρώτης τάξης.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την κλάση των star-free γλωσσών. Η κλάση αυτή περιέχει την κλάση των γλωσσών που ορίζονται από τις προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης.

Θα ορίσουμε τα counter-free πεπερασμένα αυτόματα, μια ειδική κατηγορία πεπερασμένων αυτομάτων. Θα αποδείξουμε ότι οι star-free γλώσσες αναγνωρίζονται από τα counter-free πεπερασμένα αυτόματα, αλλά υπάρχουν αναγνωρίσιμες γλώσσες που δεν μπορούν να αναγνωρισθούν από κάποιο counter-free πεπερασμένο αυτόματο. Τέλος θα αναφέρουμε ότι κάθε γλώσσα που αναγνωρίζεται από ένα counter-free πεπερασμένο αυτόματο μπορεί να ορισθεί από τύπο της γραμμικής χρονικής λογικής. Με αυτό το αποτέλεσμα θεμελιώνεται η ισότητα των κλάσεων των γλωσσών που ορίζονται από τύπους της γραμμικής χρονικής λογικής, που ορίζονται από προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης, των star-free γλωσσών, και των γλωσσών που αναγνωρίζονται από counter-free πεπερασμένα αυτόματα.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθενται ασκήσεις. Η ενασχόληση με αυτές θα είναι αποδοτική μόνο εφόσον έχει γίνει λεπτομερής μελέτη της ύλης του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Η Βιβλιογραφία, στο τέλος των σημειώσεων, περιέχει τις αναφορές του κειμένου, καθώς και κάποια από τα πιό αξιόλογα βιβλία ή κεφάλαια βιβλίων για τα πεπερασμένα αυτόματα, την μοναδιακή λογική πρώτης τάξης, τις star-free γλώσσες, τα counter-free πεπερασμένα αυτόματα, και το model checking.

Κεφάλαιο 1

Πεπερασμένα αυτόματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπενθυμίσουμε σύντομα, έννοιες και αποτελέσματα από το μάθημα της Θεωρητικής Πληροφορικής Ι που θα μας είναι χρήσιμα για την ανάπτυξη της θεωρίας μας. Συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στις γλώσσες και τις πράξεις μεταξύ γλωσσών, στα πεπερασμένα αυτόματα, στις αναγνωρίσιμες γλώσσες και τις ιδιότητές τους, στις ρητές γλώσσες, και στο θεώρημα του Kleene. Θα αποδείξουμε δύο ακόμη ιδιότητες της κλάσης των αναγνωρίσιμων γλωσσών. Τέλος θα εισάγουμε έναν εναλλακτικό ορισμό για τα πεπερασμένα αυτόματα που θα είναι πιό εύχρηστος για την την συσχέτισή τους με τη λογική.

1.1 Γλώσσες

Ένα αλφάβητο είναι ένα πεπερασμένο μη-κενό σύνολο A, και τα στοιχεία του ονομάζονται γράμματα. Μια λέξη w από το A είναι μια πεπερασμένη ακολουθία γραμμάτων του A, δηλαδή $w = a_0 \ldots a_{n-1}$ με $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. Η κενή ακολουθία ονομάζεται κενή λέξη και συμβολίζεται με ε, δηλαδή είναι η ''λέξη'' χωρίς γράμματα. Το σύνολο όλων των λέξεων από το A συμβολίζεται με A^*,

$$A^* = \{\varepsilon\} \cup \{a_0 \ldots a_{n-1} \mid n > 0, a_0, \ldots, a_{n-1} \in A\}$$

και θέτουμε

$$A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}.$$

Αργότερα θα μας είναι χρήσιμο να γράφουμε μια λέξη $w = a_0 \ldots a_{n-1}$ με $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ ως εξής:

$$w = w(0) \ldots w(n-1)$$

όπου $w(i) = a_i$ για κάθε $0 \leq i \leq n-1$.

Δύο λέξεις $w = a_0 \ldots a_{n-1}$ και $u = b_0 \ldots b_{m-1}$ από το A, με $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1} \in A$ είναι ίσες, και γράφουμε $w = u$, αν $n = m$ και $a_i = b_i$ για κάθε $0 \leq i \leq n-1$.

Η πράξη της παράθεσης ορίζεται στο σύνολο A^* ως εξής: αν $w = a_0 \dots a_{n-1}$ και $u = b_0 \dots b_{m-1} \in A^*$, τότε η παράθεση της w με την u είναι η λέξη $w \cdot u = a_0 \dots a_{n-1} b_0 \dots b_{m-1}$. Χάριν ευκολίας, στο εξής θα παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$ και θα γράφουμε wu. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η πράξη της παράθεσης είναι προσεταιριστική και η κενή λέξη ε είναι το ουδέτερο στοιχείο της (Άσκηση). Η πράξη της παράθεσης δεν είναι αντιμεταθετική. Για παράδειγμα αν $A = \{a, b\}$, $w = aa$, και $u = bbb$, τότε $wu = aabbb$ ενώ $uw = bbbaa$.

Για κάθε $w \in A^*$ και $n \geq 0$ ορίζουμε την n-οστή δύναμη w^n της w, με επαγωγή στο n, ως εξής:

- $w^0 = \varepsilon$,

- $w^{n+1} = w^n w \quad$ για κάθε $n \geq 0$.

Το είδωλο της λέξης $w = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$ είναι η λέξη $w^\rho = a_{n-1} \dots a_0$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $(wu)^\rho = u^\rho w^\rho$ για κάθε $w, u \in A^*$

Το μήκος $|w|$ μιας λέξης $w \in A^*$ είναι το πλήθος των γραμμάτων της, δηλαδή αν $w = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$, τότε $|w| = n$. Προφανώς, $|wu| = |w| + |u|$ για κάθε $w, u \in A^*$ και $|\varepsilon| = 0$.

Κάθε σύνολο $L \subseteq A^*$ ονομάζεται τυπική γλώσσα (ή απλούστερα γλώσσα) από το A.

Η πράξη της παράθεσης λέξεων, επεκτείνεται στο σύνολο των γλωσσών ως εξής: αν $L_1, L_2 \subseteq A^*$, τότε η παράθεση της L_1 με την L_2 είναι η γλώσσα

$$L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}.$$

Η πράξη της παράθεσης γλωσσών είναι προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο την γλώσσα $\{\varepsilon\}$, και επιμερίζεται ως προς την πράξη της ένωσης, δηλαδή

- $L_1 (L_2 L_3) = (L_1 L_2) L_3$

- $L_1 \{\varepsilon\} = L_1 = \{\varepsilon\} L_1$

- $L_1 (L_2 \cup L_3) = L_1 L_2 \cup L_1 L_3 \quad$ και $\quad (L_1 \cup L_2) L_3 = L_1 L_3 \cup L_2 L_3$

για κάθε $L_1, L_2, L_3 \subseteq A^*$.

Από τον ορισμό της παράθεσης γλωσσών προκύπτει εύκολα ότι αυτή δεν είναι αντιμεταθετική πράξη (θεωρήστε για παράδειγμα $A = \{a, b\}$, $L_1 = \{aa\}$, ενώ ισχύει $L_2 = \{bbb\}$), και

- $L\emptyset = \emptyset = \emptyset L$

για κάθε $L \subseteq A^*$.

Για κάθε γλώσσα $L \subseteq A^*$ και $n \geq 0$ ορίζουμε την n-οστή δύναμη L^n της L, με επαγωγή στο n, ως εξής:

- $L^0 = \{\varepsilon\}$,
- $L^{n+1} = L^n L$ για κάθε $n \geq 0$.

Η πράξη της θήκης (Kleene star, ή απλούστερα star) L^* της γλώσσας $L \subseteq A^*$ ορίζεται από τη σχέση

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots .$$

Για παράδειγμα, αν $L = \{a\}$ με $a \in A$, τότε $\{a\}^* = \{a^n \mid n \geq 0\}$.

Στο εξής, χάριν απλούστευσης των συμβολισμών, θα γράφουμε a αντί για την γλώσσα $\{a\}$, για κάθε $a \in A$. Έτσι θα γράφουμε $w = a_0 \dots a_{n-1}$ για τη γλώσσα $\{w\}$, όπου $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$, καθώς $\{w\} = \{a_0\} \dots \{a_{n-1}\}$. Όμοια θα γράφουμε $w \cup u$ αντί για $\{w, u\}$, $(w^3u^{10}c \cup bac^9b^3)^*$ αντί για $\{w^3u^{10}c, bac^9b^3\}^*$, κλπ.

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του ομομορφισμού. Ας είναι A και B δύο αλφάβητα. Μια απεικόνιση $h : A \to B^*$ ονομάζεται *ομομορφισμός από το A στο B*. Ο ομομορφισμός h επεκετείνεται σε μια απεικόνιση $h : A^* \to B^*$ ως ακολούθως:

– $h(\varepsilon) = \varepsilon$, και

– $h(uv) = h(u)h(v)$

  για κάθε $u, v \in A^*$.

Έτσι, αν $w = a_0 \dots a_{n-1}$ με $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$, τότε $h(w) = h(a_0) \dots h(a_{n-1})$. Στη συνέχεια θα ονομάζουμε ομομορφισμό από το A στο B μια απεικόνιση $h : A^* \to B^*$ που ικανοποιεί τις δύο παραπάνω συνθήκες.

Ορισμός 1.1. Ας είναι $h : A^* \to B^*$ ομομορφισμός από το A στο B. Ο h ονομάζεται

– *αυστηρός* (strict or non-deleting), αν $h(a) \neq \varepsilon$ για κάθε $a \in A$,

– *αλφαβητικός* (alphabetic), αν $h(a) \in B \cup \{\varepsilon\}$ για κάθε $a \in A$, και

– *αυστηρά αλφαβητικός* (strictly alphabetic) αν είναι αυστηρός και αλφαβητικός, δηλαδή, $h(a) \in B$ για κάθε $a \in A$.

Τέλος ανακαλούμε την έννοια των ρητών συνόλων. Οι πράξεις της ένωσης, της παράθεσης, και της θήκης γλωσσών ονομάζονται ρητές. Μια γλώσσα $L \subseteq A^*$ ονομάζεται ρητή αν προκύπτει από εφαρμογή πεπερασμένου αριθμού ρητών πράξεων σε γράμματα του A. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Rat}(A)$ την κλάση όλων ρητών γλωσσών από το A. Υπενθυμίζουμε ότι η κλάση $\mathrm{Rat}(A)$ είναι η ελάχιστη κλάση γλωσσών από το A που περιέχει τις πεπερασμένες γλώσσες και είναι κλειστή με τις ρητές πράξεις.

1.2 Πεπερασμένα αυτόματα

Στην ενότητα αυτή ανακαλούμε την έννοια του πεπερασμένου αυτομάτου, τα τρία είδη αυτομάτων και την μεταξύ τους ισοδυναμία, τις αναγνωρίσιμες γλώσσες και τις ιδιότητές τους. Τέλος δίνουμε έναν ισοδύναμο ορισμό για κάθε είδος πεπερασμένου αυτομάτου, ο οποίος θα μας δώσει την δυνατότητα καλύτερης διαχείρισης της συσχέτισης της θεωρίας των αυτομάτων με τη λογική.

Ορισμός 1.2. Ένα πλήρες πεπερασμένο αυτόματο (complete finite automaton, σύντομα CFA[1]) είναι μια πεντάδα της μορφής $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, F)$ όπου

- Q είναι το πεπερασμένο σύνολο των καταστάσεων,
- A είναι το *αλφάβητο εισόδου*,
- $q_0 \in Q$ είναι η *αρχική κατάσταση*,
- $\delta : Q \times A \to Q$ είναι μια απεικόνιση που περιγράφει τη *λειτουργία* το αυτομάτου, και
- $F \subseteq Q$ είναι το σύνολο των *τελικών καταστάσεων*.

Η δ επεκτείνεται σε μία απεικόνιση $\delta^* : Q \times A^* \to Q$, επαγωγικά στο μήκος των λέξεων, ως εξής:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$,
- $\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$

για κάθε $q \in Q, w \in A^*, a \in A$.
Για κάθε $q \in Q, w, u \in A^*$ μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή στο μήκος της λέξης u ότι ισχύει

$$\delta^*(q, wu) = \delta^*(\delta^*(q, w), u).$$

Μια λέξη $w \in A^*$ αναγνωρίζεται από το αυτόματο $\mathcal{A}$ αν $\delta^*(q_0, w) \in F$. Η γλώσσα όλων των λέξεων που αναγνωρίζονται από το $\mathcal{A}$ ονομάζεται γλώσσα (ή συμπεριφορά) του $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $L(\mathcal{A})$ (ή με $|\mathcal{A}|$), δηλαδή

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in A^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F\}.$$

Ένα CFA $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, F)$ αναπαριστάνεται με ένα γράφημα ως εξής: τοποθετούμε στο επίπεδο τις καταστάσεις του, την κάθε μία μέσα σε ένα κύκλο, και βάζουμε ένα βέλος με το γράμμα a από την κατάσταση q_i στην κατάσταση q_j αν και μόνο αν $\delta(q_i, a) = q_j$. Την αρχική κατάσταση την επισημαίνουμε με ένα βέλος που δείχνει σε αυτή ενώ τις τελικές καταστάσεις διαγράφοντας τον κύκλο τους με

[1] Ο όρος θα χρησιμοποιείται για τον ενικό και πληθυντικό αριθμό.

διπλή γραμμή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η λέξη $w = a_0 \dots a_{n-1}$ αναγνωρίζεται από το CFAαυτόματο. Αυτό σημαίνει ότι $\delta^*(q_0, w) \in F$ και από τον ορισμό της δ υπάρχουν καταστάσεις $q_1, \dots, q_n$ με $q_n \in F$ έτσι ώστε $\delta(q_0, a_0) = q_1, \delta(q_1, a_1) = q_2, \dots, \delta(q_{n-1}, a_{n-1}) = q_n$. Συνεπώς στο γράφημα του CFA θα υπάρχει μια διαδρομή

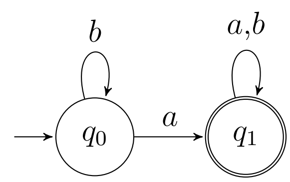
$$\to q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \dots q_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} q_n.$$

Μιά τέτοια διαδρομή που ξεκινά από την αρχική κατάσταση και καταλήγει σε τελική ονομάζεται επιτυχής. Αντίστροφα, αν για τη λέξη $w = a_0 \dots a_{n-1}$ υπάρχει μια επιτυχής διαδρομή της παραπάνω μορφής, τότε η λέξη αναγνωρίζεται από το CFA αφού $\delta^*(q_0, w) = q_n \in F$. Έτσι λοιπόν μια λέξη $w \in A^*$ αναγνωρίζεται απο το CFA $\mathcal{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει μια επιτυχής διαδρομή του $\mathcal{A}$ στη w. Συνεπώς για να βρούμε τη γλώσσα $L(\mathcal{A})$ του CFA $\mathcal{A}$ δεν έχουμε παρά να βρούμε όλες τις επιτυχείς διαδρομές του. Είναι όμως αυτό εφικτό; Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.3. *Δίνεται το* CFA $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, F)$ *με* $A = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \{q_1\}$ *και την απεικόνιση* δ *που ορίζεται από τον πίνακα*

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_1

Το γράφημα του CFA είναι το εξής



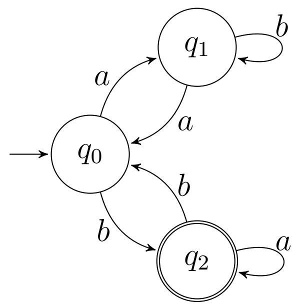
Θεωρούμε τις λέξεις $b^{10}a^3b$, $ab^{1000}a^{40}b^{23}$, b^{10000}. *Τότε* $\delta^*(q_0, b^{10}a^3b) = q_1$, $\delta^*(q_0, ab^{1000}a^{40}b^{23}) = q_1$ *και* $\delta^*(q_0, b^{10000}) = q_0$. *Έτσι* $b^{10}a^3b, ab^{1000}a^{40}b^{23} \in L(\mathcal{A})$, *ενώ* $b^{10000} \notin L(\mathcal{A})$. *Παρατηρούμε ότι με οποιαδήποτε λέξη και αν τροφοδοτήσουμε το αυτόματό μας στην αρχική κατάσταση* q_0, *για να φτάσει στην μοναδική τελική κατάσταση* q_1 *θα πρέπει η λέξη να περιέχει μία τουλάχιστο εμφάνιση του γράμματος* a. *Έτσι ''είναι εύκολο'' να συμπεράνουμε ότι*

$$L(\mathcal{A}) = b^*a(a \cup b)^*.$$

Παράδειγμα 1.4. *Δίνεται το* CFA $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, F)$ *με* $A = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ *και την απεικόνιση* δ *που ορίζεται από τον πίνακα*

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_1
q_2	q_2	q_0

Το γράφημα του CFA $\mathcal{A}$ *είναι*



Παρατηρούμε ότι $\delta^*(q_0, a^5b^{30}ab^9a^2) = q_2$, $\delta^*(q_0, a^{2013}b^{3000}ab^{19}a^{2000}) = q_2$, *ενώ* $\delta^*(q_0, a^5b^{30}ab^8) = q_0$ *και συνεπώς* $a^5b^{30}ab^9a^2, a^{2013}b^{3000}ab^{19}a^{2000} \in L(\mathcal{A})$, *ενώ* $a^5b^{30}ab^8 \notin L(\mathcal{A})$.

Είναι φανερό ότι η γλώσσα του CFA του προηγούμενου παραδείγματος δεν μπορεί να υπολογισθεί με κάποιον ''εμπειρικό'' τρόπο. Και αν το πρόβλημα της αναζήτησης της γλώσσας $L(\mathcal{A})$ στο προηγούμενο παράδειγμα φαίνεται σύνθετο ας αναλογισθεί ο αναγνώστης πόσο αυξάνει η πολυπλοκότητα του προβλήματος αυτού σε ένα CFA με 300 καταστάσεις (μικρός αριθμός για πραγματικές εφαρμογές!) και αλφάβητο εισόδου με 26 γράμματα (π.χ. της Αγγλικής γλώσσας)... Χρειαζόμαστε συνεπώς έναν αλγόριθμο με τον οποίο θα μπορούμε να υπολογίζουμε την γλώσσα οποιουδήποτε CFA. Τον αλγόριθμο αυτόν περιγράφουμε στη συνέχεια.

Ας είναι $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, F)$ ένα CFA και έστω $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. Θεωρούμε τις γλώσσες (που απαρτίζονται από γράμματα ή είναι το κενό σύνολο) $L_{ij} = \{a \in A \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$ για $0 \leq i, j \leq n$, και τις μεταβλητές X_i για $0 \leq i \leq n$. [2]

Σχηματίζουμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
X_0 &= L_{00}X_0 \cup L_{01}X_1 \cup \ldots \cup L_{0n}X_n \cup M_0 \\
X_1 &= L_{10}X_0 \cup L_{11}X_1 \cup \ldots \cup L_{1n}X_n \cup M_1 \\
&\ldots \\
X_n &= L_{n0}X_0 \cup L_{n1}X_1 \cup \ldots \cup L_{nn}X_n \cup M_n
\end{aligned}
$$

όπου $M_i = \varepsilon$ αν $q_i \in F$ και $M_i = \emptyset$ αν $q_i \notin F$, για κάθε $0 \leq i \leq n$.

Λύνουμε το σύστημα (με τη μέθοδο της αντικατάστασης) και αποκτούμε τη γλώσσα $L(\mathcal{A}) = X_0$ του CFA $\mathcal{A}$.

[2] Οι μεταβλητές X_i προκύπτουν από τη θεώρηση των CFA $\mathcal{A}_i = (Q, A, q_i, \delta, F)$ με $X_i = L(\mathcal{A}_i)$ για κάθε $0 \leq i \leq n$. Φανερά $X_0 = L(\mathcal{A})$.

Επιστρέφοντας στο CFA του Παραδείγματος 1.4, το σύστημα γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει με τον παραπάνω αλγόριθμο είναι το

$$\begin{aligned} X_0 &= aX_1 \cup bX_2 \\ X_1 &= aX_0 \cup bX_1 \\ X_2 &= aX_2 \cup bX_0 \cup \varepsilon. \end{aligned}$$

Λύνοντας με τη μέθοδο της αντικατάστασης[3] έχουμε $X_1 = b^*aX_0$ και $X_2 = a^*(bX_0 \cup \varepsilon)$ και αντικαθιστώντας στη πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} X_0 &= ab^*aX_0 \cup ba^*(bX_0 \cup \varepsilon) \\ &= ab^*aX_0 \cup ba^*bX_0 \cup ba^* \\ &= (ab^*a \cup ba^*b)X_0 \cup ba^* \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$X_0 = (ab^*a \cup ba^*b)^*ba^*.$$

Άρα $L(\mathcal{A}) = (ab^*a \cup ba^*b)^*ba^*$.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε και τα άλλα είδη των αυτομάτων και θα υπενθυμίσουμε την ισοδύναμία τους με τα CFA.

Ορισμός 1.5. Ένα deterministic πεπερασμένο αυτόματο (σύντομα DFA[4]) είναι μια πεντάδα της μορφής $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, F)$ όπου

- Q είναι το πεπερασμένο σύνολο των καταστάσεων,
- A είναι το αλφάβητο εισόδου,
- $q_0 \in Q$ είναι η αρχική κατάσταση,
- $\delta : Q \times A \to Q$ είναι μια μερική απεικόνιση που περιγράφει τη λειτουργία το αυτομάτου, και
- $F \subseteq Q$ είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων.

Το γεγονός ότι η δ είναι μερική απεικόνιση σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν ζεύγη $(q, a) \in Q \times A$ για τα οποία η $\delta(q, a)$ να μην ορίζεται. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\delta(q, a) = \emptyset$. Αυτό, για την λειτουργία του DFA, σημαίνει πως αν το DFA βρίσκεται στην κατάσταση $q \in Q$ και διαβάζει το γράμμα $a \in A$, τότε η λειτουργία του σταματάει στην κατάσταση q.

Η $\delta : Q \times A \to Q$ επεκτείνεται επαγωγικά (στο μήκος των λέξεων) όπως στην περίπτωση του πλήρους αυτομάτου. Μια λέξη $w \in A^*$ αναγνωρίζεται από το $\mathcal{A}$ αν

[3] Η ελάχιστη λύση γραμμικής εξίσωσης της μορφής $X = LX \cup M$, με $L, M \subseteq A^*$, είναι η L^*M. Επιπλέον αν η L δε περιέχει την κενή λέξη, η λύση αυτή είναι μοναδική.

[4] Ο όρος χρησιμοποιείται για τον ενικό και πληθυντικό αριθμό.

$\delta^*(q_0, w) \in F$. Η γλώσσα (ή συμπεριφορά) του $\mathcal{A}$ που συμβολίζεται με $L(\mathcal{A})$ (ή $|\mathcal{A}|$) ορίζεται όπως στα πλήρη αυτόματα, δηλαδή

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in A^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F\}.$$

Για να βρούμε τη γλώσσα ενός DFA κατασκευάζουμε και λύνουμε, όπως και στη περίπτωση των CFA, το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από το αυτόματο.

Δύο αυτόματα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ ονομάζονται ισοδύναμα, αν $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Καθώς κάθε απεικόνιση είναι μια ειδική περίπτωση μερικής απεικόνισης, είναι φανερό ότι κάθε CFA μπορεί να θεωρηθεί σαν DFA. Αυτό σημαίνει ότι οι αναγνωρίσιμες γλώσσες αναγνωρίζονται και από τα DFA. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι από κάθε DFA μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο CFA.

Πρόταση 1.6. *Για κάθε* DFA $\mathcal{A}$ *μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο* CFA $\mathcal{A}'$.

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, F)$ ένα DFA. Θεωρούμε το CFA $\mathcal{A}' = (Q \cup \{\overline{q}\}, A, q_0, \delta', F)$ όπου $\overline{q}$ είναι μια νέα κατάσταση που δεν ανήκει στο Q. Η απεικόνιση δ' ορίζεται για κάθε $q \in Q \cup \{\overline{q}\}, a \in A$ ως εξής:

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{αν } q \in Q \text{ και } \delta(q,a) \neq \emptyset \\ \overline{q} & \text{αν } q \in Q \text{ και } \delta(q,a) = \emptyset \\ \overline{q} & \text{αν } q = \overline{q}. \end{cases}$$

Ας είναι $w = a_0 \dots a_{n-1} \in L(\mathcal{A})$. Τότε υπάρχει επιτυχής διαδρομή

$$\to q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \dots q_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} q_n \in F \qquad (1)$$

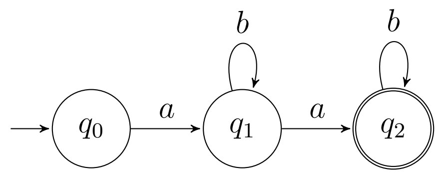
του $\mathcal{A}$ στη w, δηλαδή $\delta^*(q_0, w) \in F$. Αυτό σημαίνει ότι η $\overline{q}$ δεν εμφανίζεται στην (1). Συνεπώς η (1) είναι επιτυχής διαδρομή και στο αυτόματο $\mathcal{A}'$, οπότε η $w \in L(\mathcal{A}')$. Άρα $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}')$. Αντίτροφα, αν η $w \in L(\mathcal{A}')$, τότε υπάρχει επιτυχής διαδρομή

$$\to q_0 \xrightarrow{a_0} q_1' \xrightarrow{a_1} q_2' \dots q_{n-1}' \xrightarrow{a_{n-1}} q_n' \in F \qquad (2)$$

του $\mathcal{A}'$ στην w. Από την κατασκευή του $\mathcal{A}'$, η επιτυχής διαδρομή (2) δεν μπορεί να περιέχει την κατάσταση $\overline{q}$, γιατί αν την περιείχε τότε θα ήταν $q_n' = \overline{q} \notin F$ οπότε η διαδρομή (2) δεν θα ήταν επιτυχής. Φανερά λοιπόν η (2) είναι και επιτυχής διαδρομή του αυτομάτου $\mathcal{A}$. Συνεπώς $w \in L(\mathcal{A})$ οπότε $L(\mathcal{A}') \subseteq L(\mathcal{A})$. Άρα $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$, και τα αυτόματα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$ είναι ισοδύναμα. □

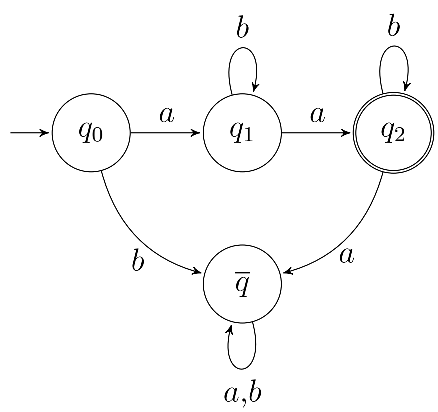
Παράδειγμα 1.7. *Δίνεται το* DFA $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\}, A, q_0, \delta, \{q_2\})$ *με*

δ	a	b
q_0	q_1	$\emptyset$
q_1	q_2	q_1
q_2	$\emptyset$	q_2.



Σύμφωνα με τη Πρόταση 1.6, το CFA $\mathcal{A}' = (\{q_0, q_1, q_2, \overline{q}\}, A, q_0, \delta', \{q_2\})$ *με*

δ'	a	b
q_0	q_1	$\overline{q}$
q_1	q_2	q_1
q_2	$\overline{q}$	q_2
$\overline{q}$	$\overline{q}$	$\overline{q}$



αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το $\mathcal{A}$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα non-deterministic πεπερασμένα αυτόματα.

Ορισμός 1.8. Ένα non-determinitsic πεπερασμένο αυτόματο (σύντομα NFA[5]) είναι μια πεντάδα της μορφής $\mathcal{A} = (Q, A, I, \delta, F)$ όπου

- Q είναι το πεπερασμένο σύνολο των καταστάσεων,
- A είναι το αλφάβητο εισόδου,
- $I \subseteq Q$ είναι το σύνολο των αρχικών καταστάσεων,
- $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ είναι η απεικόνιση που περιγράφει τη λειτουργία το αυτομάτου, και

[5] Ο όρος χρησιμοποιείται για τον ενικό και πληθυντικό αριθμό.

- $F \subseteq Q$ είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων.

Ο ορισμός της απεικόνισης δ σημαίνει πως αν το NFA είναι στην κατάσταση $q \in Q$ και διαβάζει το γράμμα $a \in A$ τότε έχει τη δυνατότητα να μεταβεί σε *οποιαδήποτε* από τις καταστάσεις του συνόλου $\delta(q, a)$ *αλλά όχι σε όλες μαζί.* Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι μπορεί $\delta(q, a) = \emptyset$. Στην περίπτωση αυτή, αν δηλαδή το NFA είναι στην κατάσταση $q \in Q$ και διαβάζει το γράμμα $a \in A$, τότε η λειτουργία του σταματάει στην κατάσταση q.

Η δ επεκτείνεται σε μία απεικόνιση $\delta^* : Q \times A^* \to \mathcal{P}(Q)$, επαγωγικά στο μήκος των λέξεων, ως εξής:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$,
- $\delta^*(q, wa) = \bigcup\limits_{q' \in \delta^*(q,w)} \delta(q', a)$

για κάθε $q \in Q, w \in A^*, a \in A$.

Η λέξη $w \in A^*$ αναγνωρίζεται από το NFA $\mathcal{A}$ αν υπάρχει αρχική κατάσταση $q_0 \in I$ έτσι ώστε $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$. Η γλώσσα όλων των λέξεων που αναγνωρίζονται από το $\mathcal{A}$ ονομάζεται γλώσσα (ή συμπεριφορά) του $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $L(\mathcal{A})$ (ή με $|\mathcal{A}|$), δηλαδή

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in A^* \mid \text{ υπάρχει } q_0 \in I \text{ έτσι ώστε } \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Για να βρούμε τη γλώσσα ενός NFA κατασκευάζουμε και λύνουμε, όπως και στη περίπτωση του CFA, το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από την απεικόνιση δ. Η γλώσσα του αυτομάτου προκύπτει από την ένωση των συνιστωσών της λύσης του συστήματος που αντιστοιχούν στις αρχικές καταστάσεις του αυτομάτου.

Παράδειγμα 1.9. *Θεωρούμε το* NFA $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{q_0, q_1\}, \delta, \{q_1, q_2\})$ *με*

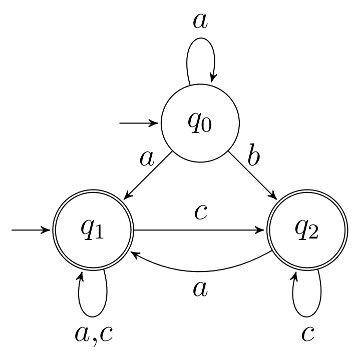
δ	a	b	c
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$.

Το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από το αυτόματο είναι

$$\begin{aligned} X_0 &= aX_0 \cup aX_1 \cup bX_2 \\ X_1 &= (a \cup c)X_1 \cup cX_2 \cup \varepsilon \\ X_2 &= aX_1 \cup cX_2 \cup \varepsilon. \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και η ζητούμενη γλώσσα του αυτομάτου είναι η $L(\mathcal{A}) = X_0 \cup X_1$.

Το γράφημα του NFA *είναι*



Φανερά κάθε CFA είναι ειδική περίπτωση ενός NFA. Υπενθυμίζουμε στη συνέχεια ότι από κάθε NFA μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο CFA.

Πρόταση 1.10. *Για κάθε* NFA $\mathcal{A}$ *μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο* CFA $\mathcal{A}'$.

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{A} = (Q, A, I, \delta, F)$ ένα NFA. Θεωρούμε το CFA $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}(Q), A, I, \delta', F')$ όπου η δ' ορίζεται από τη σχέση

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$$

για κάθε $P \in \mathcal{P}(Q), a \in A$, και το σύνολο των τελικών καταστάσεων είναι

$$F' = \{P \in \mathcal{P}(Q) \mid P \cap F \neq \emptyset\}.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\delta'^*(P, w) = \bigcup_{q \in P} \delta^*(q, w)$$

για κάθε $P \in \mathcal{P}(Q), w \in A^*$.
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο μήκος της λέξης w. Πράγματι, για $|w| = 0$ έχουμε $w = \varepsilon$ οπότε $\delta'^*(P, \varepsilon) = P$ και $\bigcup_{q \in P} \delta^*(q, \varepsilon) = \bigcup_{q \in P} \{q\} = P$. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για όλες τις λέξεις με μήκος $\leq k$ και έστω $w \in A^*$ με μήκος

$|w| = k + 1$. Τότε $w = ua$ με $u \in A^*, a \in A$ και $|u| = k$. Έχουμε

$$\begin{array}{rcll}
\delta'^*(P, w) & = & \delta'^*(P, ua) & \\
& = & \delta'(\delta'^*(P, u), a) & \\
& = & \delta'\left(\bigcup\limits_{q \in P} \delta^*(q, u), a\right) & \text{από την υπόθεση της επαγωγής} \\
& = & \bigcup\limits_{q' \in \bigcup\limits_{q \in P} \delta^*(q,u)} \delta(q', a) & \text{από τον ορισμό της } \delta' \\
& = & \bigcup\limits_{q \in P} \bigcup\limits_{q' \in \delta^*(q,u)} \delta(q', a) & \\
& = & \bigcup\limits_{q \in P} \delta^*(q, ua) & \text{από τον ορισμό της } \delta^* \\
& = & \bigcup\limits_{q \in P} \delta^*(q, w) &
\end{array}$$

όπως το θέλαμε.

Για κάθε λέξη $w \in A^*$ έχουμε

$$\begin{array}{rcl}
w \in L(\mathcal{A}') & \Longleftrightarrow & \delta'^*(I, w) \in F' \\
& \Longleftrightarrow & \bigcup\limits_{q \in I} \delta^*(q, w) \in F' \\
& \Longleftrightarrow & \bigcup\limits_{q \in I} \delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset \\
& \Longleftrightarrow & \text{υπάρχει } q_0 \in I \text{ τέτοιο ώστε } \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\
& \Longleftrightarrow & w \in L(\mathcal{A})
\end{array}$$

δηλαδή $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$, και συνεπώς το CFA $\mathcal{A}'$ είναι ισοδύναμο με το NFA $\mathcal{A}$. □

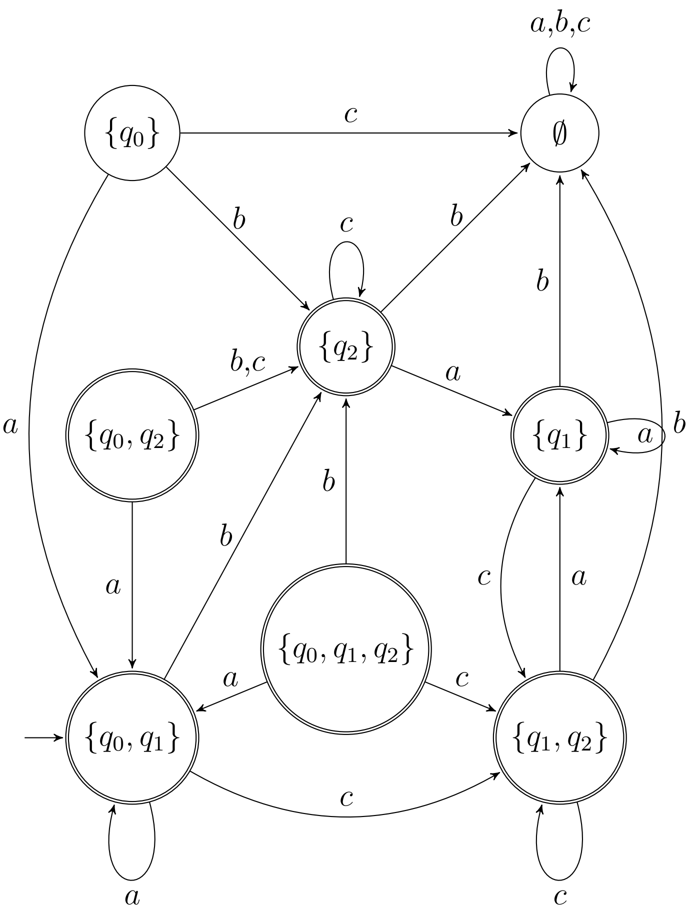
Παραθέτουμε ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της παραπάνω κατασκευής.

Παράδειγμα 1.11. *Κατασκευάζουμε το* CFA $\mathcal{A}'$ *που είναι ισοδύναμο με το* NFA $\mathcal{A}$ *του Παραδείγματος 1.9. Σύμφωνα με τη παραπάνω πρόταση, έχουμε* $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}(\{q_0, q_1, q_2\}), \{a, b, c\}, \{q_0, q_1\}, \delta', F')$ *όπου* $\mathcal{P}(\{q_0, q_1, q_2\}) = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, Q\}$ *και* $F' = \{\{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, Q\}$

ενώ η δ' δίνεται από τον πίνακα

δ	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$.

Το γράφημα του CFA $\mathcal{A}'$ *είναι*



Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα στην θεωρία πεπερασμένων αυτομάτων αναφέρεται στην δυνατότητα του να αποφασίσουμε (απαντήσουμε) αν δύο πεπερασμένα αυτόματα είναι ισοδύναμα. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.12. *Για δύο πεπερασμένα αυτόματα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ ή όχι.*

Άμεση συνέπεια του τελευταίου αποτελέσματος είναι τα δύο επόμενα πορίσματα.

Πόρισμα 1.13. *Για οποιοδήποτε πεπερασμένο αυτόματο $\mathcal{A}$ με αλφάβητο εισόδου A μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L(\mathcal{A}) = A^*$ ή όχι.*

Πόρισμα 1.14. *Για οποιοδήποτε πεπερασμένο αυτόματο $\mathcal{A}$ μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L(\mathcal{A}) = \emptyset$ ή όχι.*

Από τα προηγούμενα, είναι φανερό πως για οποιοδήποτε αλφάβητο A, οι κλάσεις των γλωσσών από το A που αναγνωρίζονται από όλα τα CFA, τα DFA, και τα NFA, αντίστοιχα, ταυτίζονται. Αυτή την κλάση την ονομάζουμε κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών από το A και τη συμβολίζουμε με $\mathrm{Rec}(A)$. Μια γλώσσα $L \subseteq A^*$ δηλαδή είναι αναγνωρίσιμη αν υπάρχει CFA (ή DFA, ή NFA) $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $L = L(\mathcal{A})$.

Στο επόμενο θεώρημα υπενθυμίζουμε ιδιότητες της κλάσης των αναγνωρισίμων γλωσσών.

Θεώρημα 1.15. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Η κλάση $\mathrm{Rec}(A)$ είναι κλειστή με τις πράξεις της ένωσης, της τομής, της παράθεσης, της διαφοράς, της θήκης, και του συμπληρώματος, δηλαδή για κάθε $L, L_1, L_2 \in \mathrm{Rec}(A)$ και οι γλώσσες $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1L_2, L_1 \setminus L_2, L^*, \bar{L} \in \mathrm{Rec}(A)$.*

Το θεώρημα του Kleene αποκαθιστά την ισότητα των κλάσεων των αναγνωρίσιμων και ρητών γλωσσών.

Θεώρημα 1.16. *[Kleene] Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε*

$$\mathrm{Rec}(A) = \mathrm{Rat}(A).$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό για τα πεπερασμένα αυτόματα που θα μας δώσει μεγαλύτερη ευχέρεια στην συσχέτιση της θεωρίας των αυτομάτων με τη λογική.

Ορισμός 1.17. Ένα non-deterministic πεπερασμένο αυτόματο (σύντομα NFA) είναι μια πεντάδα $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, F)$ όπου

– Q είναι το πεπερασμένο σύνολο των καταστάσεων,

– A είναι το αλφάβητο εισόδου,

– $I \subseteq Q$ είναι το σύνολο των αρχικών καταστάσεων,

– $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$ είναι το σύνολο των μεταβάσεων, και

– $F \subseteq Q$ είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων.

Θεωρούμε μια λέξη $w = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$. Μια διαδρομή P_w του $\mathcal{A}$ στην w είναι μια ακολουθία μεταβάσεων

$$P_w = ((q_i, a_i, q_{i+1}))_{0 \leq i \leq n-1}.$$

Η διαδρομή P_w ονομάζεται επιτυχής, αν $q_0 \in I$ και $q_n \in F$. Αν υπάρχει επιτυχής διαδρομή του $\mathcal{A}$ στην w, τότε λέμε ότι η w αναγνωρίζεται απο το $\mathcal{A}$. Η γλώσσα του $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των λέξεων που αναγνωρίζονται από το $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $L(\mathcal{A})$ (ή με $|\mathcal{A}|$).

Αν συγκρίνουμε τον παραπάνω Ορισμό 1.17 του NFA με τον Ορισμό 1.8 βλέπουμε ότι η μόνη διαφορά είναι στο σύνολο Δ και την απεικόνιση δ. Ας ξεκινήσουμε από ένα NFA $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, F)$ του Ορισμού 1.17. Θεωρούμε το NFA $\mathcal{A}' = (Q, A, I, \delta, F)$ σύμφωνα με τον Ορισμό 1.8, και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$$

ως εξής: Για κάθε $(q, a) \in Q \times A$ θέτουμε

$$\delta(q, a) = \{q' \in Q \mid (q, a, q') \in \Delta\}.$$

Για κάθε $q \in Q$ και λέξη $w = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$ μπορούμε να δείξουμε, με επαγωγή στο μήκος της λέξης w, ότι

$$\begin{aligned} \delta^*(q, w) = \{q' \in Q \mid \ & \text{υπάρχει διαδρομή } (q, a_0, q_1)(q_1, a_1, q_2) \dots (q_{n-1}, a_{n-1}, q') \\ & \text{με } (q, a_0, q_1), \dots, (q_{n-1}, a_{n-1}, q') \in \Delta\}. \end{aligned}$$

Έτσι για κάθε $w = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{A}) & \Longleftrightarrow \text{υπάρχει επιτυχής διαδρομή } P_w = ((q_i, a_i, q_{i+1}))_{0 \leq i \leq n-1} \\ & \qquad \text{του } \mathcal{A} \text{ στην } w \\ & \Longleftrightarrow \text{υπάρχει διαδρομή } P_w = ((q_i, a_i, q_{i+1}))_{0 \leq i \leq n-1} \text{ του } \mathcal{A} \text{ στην } w \\ & \qquad \text{με } q_0 \in I \text{ και } q_n \in F \\ & \Longleftrightarrow q_n \in \delta^*(q_0, w) \text{ με } q_0 \in I \text{ και } q_n \in F \\ & \Longleftrightarrow w \in L(\mathcal{A}'). \end{aligned}$$

Συνεπώς τα δύο αυτόματα είναι ισοδύναμα.

Ένα NFA $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, F)$ ονομάζεται DFA (αντίστοιχα CFA) αν $|I| = 1$ και για κάθε $q \in Q$ και $a \in A$ υπάρχει το πολύ (αντίστοιχα ακριβώς) ένα $q' \in Q$ με $(q, a, q') \in \Delta$. Φανερά τα DFA και CFA που ορίζονται εδώ συμπίπτουν με τα αντίστοιχα που δόθηκαν παραπάνω στους Ορισμούς 1.5 και 1.2.

1.3 Δύο ιδιότητες της κλάσης των αναγνωρίσιμων γλωσσών

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε δύο ακόμη ιδιότητες της κλάσης των αναγνωρίσιμων γλωσσών. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι η εικόνα μιας αναγνωρίσιμης γλώσσας μέσω ενός αυστηρού ομομορφισμού είναι πάλι αναγνωρίσιμη γλώσσα. Όμοια η αντίστροφη εικόνα μιας αναγνωρίσιμης γλώσσας μέσω ενός αυστηρά αλφαβητικού ομομορφισμού είναι αναγνωρίσμη γλώσσα.

Πρόταση 1.18. *Ας είναι A, B αλφάβητα και $h : A^* \to B^*$ αυστηρός ομομορφισμός. Για κάθε γλώσσα $L \subseteq A^*$ ισχύει*

$$L \in \mathrm{Rec}(A) \Longrightarrow h(L) \in \mathrm{Rec}(B).$$

Απόδειξη. Αφού η L είναι αναγνωρίσιμη υπάρχει NFA $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, F)$ με $L(\mathcal{A}) = L$. Κατασκευάζουμε το NFA $\mathcal{B} = (Q \cup P, B, I, \Delta', F)$ ως εξής:
Για κάθε $a \in A$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Αν $h(a) = b \in B$, τότε για κάθε μετάβαση $(q, a, q') \in \Delta$ το σύνολο Δ' θα περιέχει τη μετάβαση (q, b, q').

ii) Αν $h(a) = b_1 \dots b_n$ με $n > 1$ και $b_1, \dots, b_n \in B$, τότε για κάθε μετάβαση $(q, a, q') \in \Delta$ θεωρούμε τις νέες καταστάσεις $p_1, \dots, p_{n-1}$ και το σύνολο Δ' θα περιέχει τις μεταβάσεις $(q, b_1, p_1), (p_1, b_2, p_2), \dots, (p_{n-1}, b_n, q')$.

Το σύνολο P περιέχει όλες τις νέες καταστάσεις που προκύπτουν για όλα τα γράμματα και τις μεταβάσεις της περίπτωσης (ii), και το Δ' όλες τις νέες μεταβάσεις όπως ορίσθηκαν παραπάνω. Θα δείξουμε ότι

$$L(\mathcal{B}) = h(L).$$

Πράγματι ας είναι $w = a_0 \dots a_{n-1} \in L$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει επιτυχής διαδρομή $P_w^{(\mathcal{A})}$ του $\mathcal{A}$ στην w,

$$P_w^{(\mathcal{A})} = (q_0, a_0, q_1)(q_1, a_1, q_2) \dots (q_{n-1}, a_{n-1}, q_n).$$

Στην παραπανω διαδρομή αντικαθιστούμε κάθε μετάβαση (q_i, a_i, q_{i+1}), $0 \leq i \leq n-1$ με τις αντίστοιχες νέες μεταβάσεις από την Δ' που προέκυψαν με την παραπάνω διαδικασία. Προκύπτει έτσι μια διαδρομή

$$P_{h(w)}^{(\mathcal{B})} = (q_0, -, -) \dots (-, -, q_n)$$

του $\mathcal{B}$ στην $h(w)$, η οποία είναι επιτυχής καθώς από την υπόθεση έχουμε $q_0 \in I$ και $q_n \in F$. Άρα $h(w) \in L(\mathcal{B})$ και συνεπώς $h(L) \subseteq L(\mathcal{B})$.

Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται ανάλογα. Έτσι $L(\mathcal{B}) = h(L)$ που σημαίνει ότι $h(L) \in \mathrm{Rec}(B)$. □

Πρόταση 1.19. *Ας είναι A, B αλφάβητα και $h : A^* \to B^*$ αυστηρά αλφαβητικός ομομορφισμός. Για κάθε γλώσσα $L \subseteq B^*$ ισχύει*

$$L \in \mathrm{Rec}(B) \Longrightarrow h^{-1}(L) \in \mathrm{Rec}(A).$$

Απόδειξη. Αφού η L είναι αναγνωρίσιμη υπάρχει NFA $\mathcal{B} = (Q, B, I, \Delta, F)$ με $L(\mathcal{B}) = L$. Κατασκευάζουμε το NFA $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta', F)$, με

$$\Delta' = \{(q, a, q') \in Q \times A \times Q \mid (q, h(a), q') \in \Delta\}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$L(\mathcal{A}) = h^{-1}(L).$$

Πράγματι, ας είναι $u = b_0 \dots b_{n-1} \in L(\mathcal{B})$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει επιτυχής διαδρομή

$$P_u^{(\mathcal{B})} = (q_0, b_0, q_1) \dots (q_{n-1}, b_{n-1}, q_n)$$

του $\mathcal{B}$ στην u.
Αν υπάρχουν γράμματα $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ τέτοια ώστε $h(a_0) = b_0, \dots, h(a_{n-1}) = b_{n-1}$, τότε από την κατασκευή του NFA $\mathcal{A}$, υπάρχουν οι μεταβάσεις $(q_0, a_0, q_1), \dots,$ $(q_{n-1}, a_{n-1}, q_n) \in \Delta'$. Συνεπώς υπάρχει επιτυχής διαδρομή

$$P_w^{(\mathcal{A})} = (q_0, a_0, q_1) \dots (q_{n-1}, a_{n-1}, q_n)$$

του $\mathcal{A}$ στην $w = a_0 \dots a_{n-1}$, οπότε $w \in L(\mathcal{A})$. Άρα $h^{-1}(L) \subseteq L(\mathcal{A})$.
Αντίστροφα, ας είναι $w = a_0 \dots a_{n-1} \in L(\mathcal{A})$, οπότε υπάρχει επιτυχής διαδρομή

$$P_w^{(\mathcal{A})} = (q_0, a_0, q_1) \dots (q_{n-1}, a_{n-1}, q_n)$$

του $\mathcal{A}$ στην w. Από την κατασκευή του $\mathcal{A}$ υπάρχει επιτυχής διαδρομή

$$P_{h(w)}^{(\mathcal{B})} = (q_0, h(a_0), q_1) \dots (q_{n-1}, h(a_{n-1}), q_n)$$

του $\mathcal{B}$ στην $h(w)$. Αυτό σημαίνει ότι $w \in h^{-1}(L)$, και συνεπώς $L(\mathcal{A}) \subseteq h^{-1}(L)$. Συνάγουμε

$$h^{-1}(L) = L(\mathcal{A})$$

όπως το θέλαμε. □

Ασκήσεις

1) Ας είναι A ένα αλφάβητο. Στο $\mathcal{P}(A^*)$ ορίζουμε την πράξη alt ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathrm{alt}(L,M) = \{a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n \mid a_1a_2\ldots a_n \in L, b_1b_2\ldots b_n \in M,\\ a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in A\}.\end{aligned}$$

Να δείξετε ότι αν $L, M \in \mathrm{Rec}(A)$, τότε και $\mathrm{alt}(L,M) \in \mathrm{Rec}(A)$.

2) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $w, u \in A^*$. Το μικτό γινόμενο $w \sqcup\!\sqcup\, u$ των w, u είναι η γλώσσα

$$\begin{aligned}w \sqcup\!\sqcup\, u = \{w_1u_1\ldots w_nu_n \mid w = w_1w_2\ldots w_n, u = u_1u_2,\ldots u_n,\\ w_1,w_2,\ldots,w_n,u_1,u_2,\ldots,u_n \in A^*\}.\end{aligned}$$

Το μικτό γινόμενο δύο γλωσσών $L, M \subseteq A^*$ ορίζεται από τη σχέση

$$L \sqcup\!\sqcup\, M = \bigcup_{w\in L, u\in M} w \sqcup\!\sqcup\, u.$$

Να δείξετε ότι αν $L, M \in \mathrm{Rec}(A)$, τότε και $L \sqcup\!\sqcup\, M \in \mathrm{Rec}(A)$.

Κεφάλαιο 2

Μοναδιακή λογική δεύτερης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε την θεωρία της μοναδιακής λογικής δεύτερης τάξης (monadic second-order logic, σύντομα MSO λογική) και θα αποδείξουμε το σημαντικό θεώρημα των Büchi-Elgot-Trakhtenbrot[1] που θεμελιώνει την εκφραστική ισοδυναμία των πεπερασμένων αυτομάτων και των προτάσεων της MSO λογικής.

Ας είναι A ένα αλφάβητο και $w = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$. Το σύνολο $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ονομάζεται πεδίο ορισμού (domain) της w και συμβολίζεται με $\mathrm{dom}(w)$, δηλαδή

$$\mathrm{dom}(w) = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Τα στοιχεία του καθορίζουν τις θέσεις των γραμμάτων στη λέξη w. Θα συμβολίζουμε με $x, y, z, \dots$ μεταβλητές ''πρώτης τάξης'' που θα παίρνουν τιμές στο $\mathrm{dom}(w)$, και με $X, Y, Z, \dots$ μεταβλητές ''δεύτερης τάξης'' που θα παίρνουν τιμές στο $\mathcal{P}(\mathrm{dom}(w))$.

Αρχικά θα παρουσιάσουμε ''διαισθητικά'', με απλά παραδείγματα, τύπους από την MSO λογική[2].

Παράδειγμα 2.1. *Για τα παραδείγματά μας θα χρησιμοποιήσουμε το αλφάβητο* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

- *Ο* $P_b(x)$ *είναι τύπος της* MSO *λογικής. Ο τύπος* $P_b(x)$ *θα ''ικανοποιείται'' από μια λέξη* $w \in A^*$, *αν η λέξη έχει το γράμμα* b *στην θέση* $x \in \mathrm{dom(w)}$. *Αλλά ποιά είναι η θέση* x*; Αν για παράδειγμα* $w = aabcdac$ *μπορούμε να γράψουμε* $w \models P_b(x)$ *(η* w *ικανοποιεί τον τύπο* $P_b(x)$*); Φανερά, αυτή η ερώτηση δεν έχει νόημα αν δεν ξέρουμε ποιά τιμή θα πάρει η μεταβλητή* x *στο* $\mathrm{dom}(w) = \{0, \dots, 6\}$. *Μπορούμε όμως να γράψουμε*

$$w \models P_b(2),$$

$$w \models P_a(1),$$

[1] Αποδείχτηκε ανεξάρτητα από τους J.R. Büchi [2], C. Elgot [6], και B. Trakhtenbrot [12].

[2] Θα ορίσουμε αυστηρά την σύνταξη της MSO λογικής παρακάτω.

$$w \models P_c(3)$$

αλλά και

$$w \not\models P_b(1),$$

$$w \not\models P_d(5).$$

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε

$$w \models \exists x.P_b(x),$$

καθώς "υπάρχει" θέση x *(*$x \mapsto 2$*) στην οποία η λέξη* w *έχει το γράμμα* b.

– *Ας είναι* $w = ebacafc$. *Τότε*

$$w \models \exists x.P_a(x) \vee \exists y.P_d(y)$$

όπου $\vee$ *συμβολίζει το "ή", και η* w *ικανοποιεί την* $\exists x P_a(x)$. *Αλλά*

$$w \not\models \exists x P_a(x) \wedge \exists y.P_d(y)$$

όπου $\wedge$ *συμβολίζει το "και" και η* $w \not\models \exists y.P_d(y)$.

– *Ας είναι* $w = a^4$. *Τότε*

$$w \models \forall x.P_a(x)$$

καθώς για κάθε θέση στο σύνολο $\mathrm{dom}(w) = \{0, 1, 2, 3\}$ *το γράμμα της* w *είναι* a. *Όμως*

$$w \not\models \exists x.P_b(x).$$

– *Ας είναι* $w = abccdfe$. *Τότε*

$$w \models \exists x.\exists y.(P_a(x) \wedge P_c(y) \wedge (x \leq y))$$

καθώς η λέξη w *έχει το γράμμα* a *στη θέση* 0, *έχει το γράμμα* c *στη θέση* 2 *(ή* 3*), και* $0 \leq 2$ *(ή* $0 \leq 3$*).*

– *Θεωρούμε τώρα τον τύπο*

$$\varphi = \exists x.(P_c(x) \wedge \forall y.(x \leq y)).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$w \models \varphi \quad \textit{ανν} \quad w \in cA^*$$

δηλαδή η φ *ικανοποιείται από όλες τις λέξεις που περιέχουν τουλάχιστον μία εμφάνιση του γράμματος* c *και η θέση του είναι "μικρότερη" από όλες τς άλλες. Συνεπώς αυτή η θέση είναι η θέση* 0.

– *Θεωρούμε τον τύπο*

$$\varphi = \exists x.\exists y.(P_a(x) \wedge P_c(y) \wedge \forall z.((x \leq z) \wedge (z \leq y))).$$

Παρατηρούμε ότι μια λέξη w θα ικανοποιεί τον τύπο φ ανν υπάρχουν στην w δύο θέσεις που θα έχουν τα γράμματα a και c αντίστοιχα, η θέση του a είναι μικρότερη από οποιαδήποτε άλλη θέση της w ($\forall z.(x \leq z)$), και η θέση του c είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε άλλη θέση του w ($\forall z.(z \leq y)$). Έτσι

$$w \models \varphi \quad \text{ανν} \quad w \in aA^*c.$$

– *Θεωρούμε τον τύπο*

$$\varphi = \exists x.(P_b(x) \wedge \exists y.(P_c(y) \wedge (y = x + 1)) \wedge \forall z.(x \leq z)).$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$w \models \varphi \quad \text{ανν} \quad w \in bcA^*.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

– *Θεωρούμε τον τύπο*

$$\varphi = \exists X.\forall x.(x \in X \to P_a(x))$$

όπου το σύμβολο $\to$ έχει την έννοια του "συνεπάγεται". Παρατηρούμε ότι μια λέξη w θα ικανοποιεί την φ αν υπάρχει ένα σύνολο θέσεων της w δηλαδή ένα υποσύνολο (X) του $\mathrm{dom}(w)$ *έτσι ώστε σε κάθε θέση του το γράμμα να είναι a. Για παράδειγμα, αν $w = caabfead$ τότε*

$$w \models \varphi$$

για $X \mapsto \{1, 2, 6\}$, αλλά και αν $w = ffedcb$, τότε και πάλι $w \models \varphi$ (μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;)

– *Θεωρούμε τον τύπο*

$$\varphi = \exists X.\exists Y.\forall x.\forall y.\Big(\big((x \in X) \wedge (y \in Y) \wedge (x < y)\big) \to (P_a(x) \wedge P_c(y))\Big).$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$cdacf \models \varphi$$

και

$$aacccdacf \models \varphi.$$

– *Θεωρούμε τη γλώσσα*

$$L = (ab)^+ = \{ab, (ab)^2, \ldots\}.$$

Μπορείτε να κατασκευάσετε τύπο φ τέτοιο ώστε

$$w \models \varphi \quad \textit{ανν} \quad w \in L?$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\begin{aligned}\varphi =& \exists x.\exists y.\Big(P_a(x) \wedge P_b(y) \wedge \forall z.(x \leq z \wedge z \leq y)\Big) \wedge \\ & \forall x'.\forall y'\Big(y' = x' + 1 \to \big((P_a(x') \wedge P_b(y')) \vee \big(P_b(x') \wedge P_a(y')\big)\big)\Big).\end{aligned}$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

– *Θεωρούμε τη γλώσσα*

$$L = (aa)^+ = \{aa, (aa)^2, \ldots\}.$$

Μπορείτε να κατασκευάσετε τύπο φ τέτοιο ώστε

$$w \models \varphi \quad \textit{ανν} \quad w \in L?$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό της σύνταξης της MSO λογικής.

Ορισμός 2.2 (Συνακτικό των τύπων της MSO λογικής). Ας είναι A ένα αλφάβητο. Το συντακτικό των τύπων της *μοναδιακής λογικής δεύτερης τάξης* (*monadic second-order logic*, σύντομα MSO logic) *από το A* δίνεται από τη γραμματική

$$\varphi := \mathrm{true} \mid P_a(x) \mid x \leq y \mid x \in X \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x.\varphi \mid \exists X.\varphi,$$

όπου $a \in A$, x, y είναι μεταβλητές πρώτης τάξης, X είναι μεταβλητή δεύτερης-τάξης, $\neg$ είναι ο τελεστής της άρνησης, $\vee$ είναι ο τελεστής της διάζευξης, $\exists x$ είναι υπαρξιακός ποσοδείκτης πρώτης τάξης, και $\exists X$ είναι υπαρξιακός ποσοδείκτης δεύτερης τάξης.

Οι τύποι $P_a(x), x \leq y, x \in X$ ονομάζονται ατομικοί.
Θέτουμε

– false $= \neg$true,

– $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$,
όπου $\wedge$ είναι ο τελεστής της σύζευξης,

– $\forall x.\varphi = \neg\exists x.\neg\varphi$,
όπου $\forall x$ είναι ο καθολικός ποσοδείκτης πρώτης τάξης, και

– $\forall X.\varphi = \neg\exists X.\neg\varphi$,
όπου $\forall X$ είναι ο καθολικός ποσοδείκτης δεύτερης τάξης.

Ας είναι φ ένας τύπος της MSO λογικής από το A. Το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών $\mathrm{free}(\varphi)$ του φ ορίζεται επαγωγικά στην δομή του φ ως εξής:

– $\mathrm{free}(\mathrm{true}) = \emptyset$,

– $\mathrm{free}(P_a(x)) = \{x\}$,

– $\mathrm{free}(x \leq y) = \{x, y\}$,

– $\mathrm{free}(x \in X) = \{x, X\}$,

– $\mathrm{free}(\neg\varphi) = \mathrm{free}(\varphi)$,

– $\mathrm{free}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{free}(\varphi_1) \cup \mathrm{free}(\varphi_2)$,

– $\mathrm{free}(\exists x.\varphi) = \mathrm{free}(\varphi) \setminus \{x\}$,

– $\mathrm{free}(\exists X.\varphi) = \mathrm{free}(\varphi) \setminus \{X\}$.

Ας είναι $w = a_0 \ldots a_{n-1} \in A^*$. Το πεδίο ορισμού της w, όπως προαναφέραμε, είναι το σύνολο

$$\mathrm{dom}(w) = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Στο εξής θα μας βοηθήσει στην ανάπτυξη της θεωρίας μας να γράφουμε την λέξη w ως $w = w(0)w(1)\ldots w(n-1)$, όπου $w(i) = a_i$, για κάθε $0 \leq i \leq n-1$. Αν $w = \varepsilon$, τότε θέτουμε $\mathrm{dom}(w) = \emptyset$.

Ας είναι $\mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης, και $w = a_0 \ldots a_{n-1} \in A^*$ μία λέξη. Μια $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεση είναι μια απεικόνιση

$$\sigma : \mathcal{V} \to \mathrm{dom}(w) \cup \mathcal{P}(\mathrm{dom}(w))$$

η οποία στέλνει κάθε μεταβλητή πρώτης τάξης του $\mathcal{V}$ σε ένα στοιχείο του $\mathrm{dom}(w)$, και κάθε μεταβλητή δεύτερης τάξης του $\mathcal{V}$ σε ένα υποσύνολο του $\mathrm{dom}(w)$.

Παράδειγμα 2.3. *Θεωρούμε την λέξη $w = a_0 \ldots a_{n-1} \in A^*$, το σύνολο των μεταβλητών $\mathcal{V} = \{x, y, X, Y\}$, και την $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεση σ που ορίζεται από τη σχέση $\sigma(x) = i$, $\sigma(y) = 0$, $\sigma(X) = \{1, j, n-1\}$, και $\sigma(Y) = \emptyset$. Η σ μπορεί να παρασταθεί με τον πίνακα*

w:	a_0	a_1	$\ldots$	a_i	$\ldots$	a_j	$\ldots$	a_{n-1}
x	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0
y	1	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0
X	0	1	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	1
Y	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0

.

Ο πίνακας κατασκευάζεται ως εξής: Η πρώτη γραμμή έχει τα γράμματα της λέξης w, με τη σειρά που εμφανίζονται σε αυτή, και η πρώτη στήλη τις μεταβλητές του συνόλου $\mathcal{V}$. Στη γραμμή που αντιστοιχεί σε κάθε μεταβλητή πρώτης τάξης βάζουμε 1 στη θέση της εικόνας της μεταβλητής μέσω της $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεσης σ, ενώ στη γραμμή κάθε μεταβλητής δεύτερης τάξης βάζουμε 1 σε κάθε θέση που ανήκει στην αντίστοιχη εικόνα της μεταβλητής (που είναι σύνολο) μέσω της $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεσης σ.

Ας είναι τώρα σ μια $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεση, x και X μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα, και $i \in \mathrm{dom}(w)$, $I \subseteq \mathrm{dom}(w)$. Θα γράφουμε $\sigma[x \to i]$ για την $(\mathcal{V} \cup \{x\}, w)$-ανάθεση η οποία συμπίπτει με την σ στο $\mathcal{V} \setminus \{x\}$ και προσαρτά το i στο x. Όμοια, θα γράφουμε $\sigma[X \to I]$ για την $(\mathcal{V} \cup \{X\}, w)$-ανάθεση που συμπίπτει με την σ στο $\mathcal{V} \setminus \{X\}$ και προσαρτά το I στο X.

Στη συνέχεια θεωρούμε αλφάβητο A και $\mathcal{V}$ πεπερασμένο σύνολο μεταβλητών πρώτης και δεύτερης τάξης. Κατασκευάζουμε το αλφάβητο $A_{\mathcal{V}} = A \times \{0,1\}^{\mathcal{V}}$. Από την κατασκευή του $A_{\mathcal{V}}$, κάθε γράμμα του προκύπτει από ένα γράμμα $a \in A$ και μια απεικόνιση από το $\mathcal{V}$ στο $\{0,1\}$. Έτσι μια λέξη $\widetilde{w} \in A_{\mathcal{V}}^*$ μπορεί να γραφεί σαν ένα ζεύγος (w, σ) όπου w είναι η προβολή της $\widetilde{w}$ στο αλφάβητο A, και σ είναι η προβολή της $\widetilde{w}$ στο σύνολο των απεικονίσεων $\{0,1\}^{\mathcal{V}}$. Για παράδειγμα, ας είναι $A = \{a, b\}$, $\mathcal{V} = \{x, y, X\}$, και θεωρούμε τη λέξη $\widetilde{w} = (a, x \mapsto 0, y \mapsto 1, X \mapsto 1)(b, x \mapsto 0, y \mapsto 1, X \mapsto 0)(b, x \mapsto 0, y \mapsto 0, X \mapsto 1)$. Η $\widetilde{w}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\widetilde{w} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

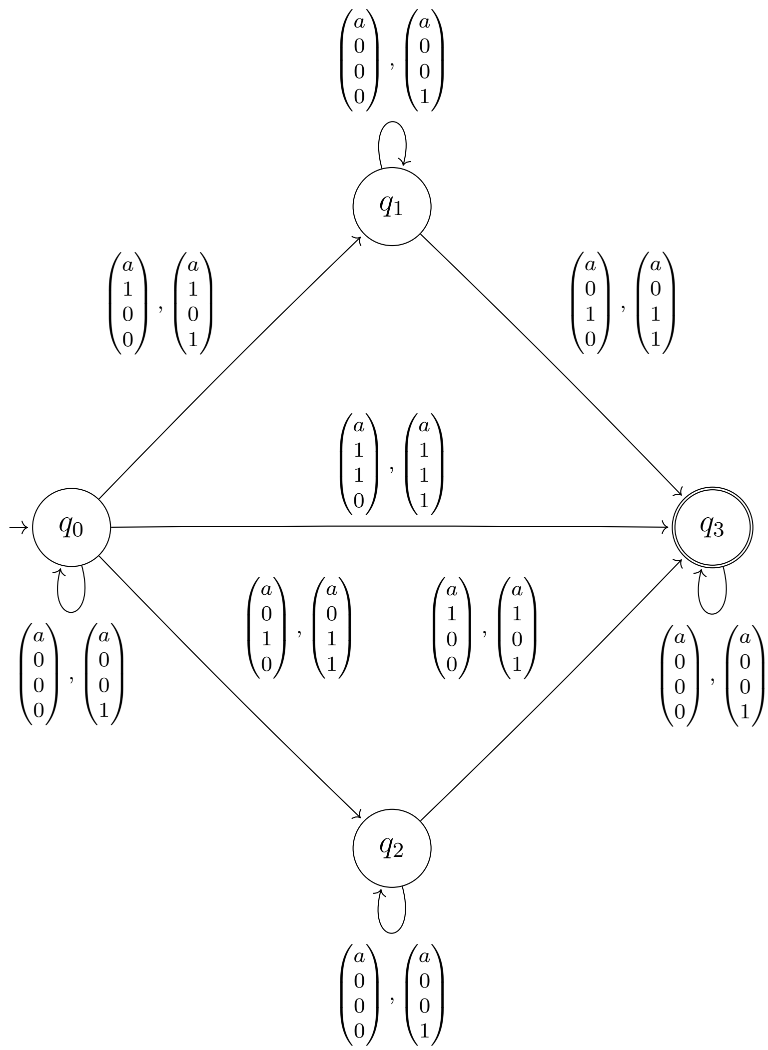
όπου η δεύτερη συνιστώσα κάθε γράμματος αντιστοιχεί στην εικόνα της μεταβλητής x, η τρίτη στην εικόνα της μεταβλητής y, και η τέταρτη στην εικόνα της μεταβλητής X. Η $\widetilde{w}$ μπορεί ακόμη να γραφεί ως ζεύγος (w, σ), όπου $w = abb$ και σ δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{array}{c|ccc} w: & a & b & b \\ \hline x & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 1 & 0 \\ X & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η ‘‘απεικόνιση’’σ που περιγράφεται από τον παραπάνω πίνακα *δεν είναι* $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεση καθώς η y παίρνει την τιμή 1 στις θέσεις 0 και 1 του $\mathrm{dom}(w)$, ενώ η μεταβλητή x δεν έχει 1 σε καμία θέση. Θα συμβολίζουμε με $N_{\mathcal{V}}$ το υποσύνολο των στοιχείων του $A_{\mathcal{V}}^*$ των οποίων η δεύτερη συνιστώσα είναι μια έγκυρη ανάθεση, δηλαδή

$$N_{\mathcal{V}} = \{(w, \sigma) \mid w \in A^* \text{ και η } \sigma \text{ είναι } (\mathcal{V}, w)\text{-ανάθεση}\}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα παίζει, όπως θα δούμε, ένα σημαντικό ρόλο στη συνέχεια.



Σχήμα 2.1: Το CFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα $N_{\mathcal{V}}$, για $\mathcal{V} = \{x, y, X\}$.

Πρόταση 2.4. *Ας είναι A ένα αλφάβητο και $\mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης. Η γλώσσα $N_{\mathcal{V}}$ από το $A_{\mathcal{V}}$ είναι αναγνωρίσιμη.*

Απόδειξη. Χάριν απλότητας, θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{V} = \{x, y, X\}$ με τρία μόνο στοιχεία, και κατασκευάζουμε το CFA $\mathcal{A}$, με αλφάβητο εισόδου το $A_{\mathcal{V}}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1, με τη σύμβαση ότι το γράμμα a που εμφανίζεται στην πρώτη συνιστώσα των γραμμάτων του $A_{\mathcal{V}}$ θα αναφέρεται σε κάθε γράμμα από το αλφάβητο A.

Είναι εύκολο να δείξουμε[3] ότι $L(\mathcal{A}) = N_{\mathcal{V}}$, οπότε $N_{\mathcal{V}} \in \mathrm{Rec}(A_{\mathcal{V}})$, όπως το θέλαμε. $\square$

[3] Αφήνουμε την αυστηρή απόδειξη σαν άσκηση.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ορίσουμε τη σημασιολογία των τύπων της MSO λογικής.

Ορισμός 2.5 (Σημασιολογία των τύπων της MSO λογικής)**.** Ας είναι φ τύπος της MSO λογικής από το αλφάβητο A, και $\mathcal{V}$ πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης, τέτοιο ώστε $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$. Τότε για κάθε $w \in A^*$ και $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεση σ, ορίζουμε την σχέση ικανοποιησιμότητας $(w, \sigma) \models \varphi$ επαγωγικά στη δομή του φ ως εξής:

- $(w, \sigma) \models \mathrm{true}$,
- $(w, \sigma) \models P_a(x)$ ανν $w(\sigma(x)) = a$,
- $(w, \sigma) \models x \leq y$ ανν $\sigma(x) \leq \sigma(y)$,
- $(w, \sigma) \models x \in X$ ανν $\sigma(x) \in \sigma(X)$,
- $(w, \sigma) \models \neg\varphi$ ανν $(w, \sigma) \not\models \varphi$,
- $(w, \sigma) \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ ανν $(w, \sigma) \models \varphi_1$ ή $(w, \sigma) \models \varphi_2$,
- $(w, \sigma) \models \exists x.\varphi$ ανν υπάρχει $i \in \mathrm{dom}(w)$ τέτοιο ώστε $(w, \sigma[x \to i]) \models \varphi$,
- $(w, \sigma) \models \exists X.\varphi$ ανν υπάρχει $I \subseteq \mathrm{dom}(w)$ τέτοιο ώστε $(w, \sigma[X \to I]) \models \varphi$.

Ένας τύπος φ της MSO λογικής από το A θα ονομάζεται πρόταση, αν $\mathrm{free}(\varphi) = \emptyset$. Στην περίπτωση αυτή (καθώς ο φ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές και συνεπώς δεν χρειάζεται κάποια ανάθεση) θα γράφουμε $w \models \varphi$, αν η λέξη $w \in A^*$ ικανοποιεί την φ.

Για κάθε τύπο φ της MSO λογικής από το A, και κάθε πεπερασμένο σύνολο μεταβλητών πρώτης και δεύτερης τάξης $\mathcal{V}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$, θέτουμε

$$L_{\mathcal{V}}(\varphi) = \{(w, \sigma) \in N_{\mathcal{V}} \mid (w, \sigma) \models \varphi\}$$

Ειδικότερα αν ο τύπος φ είναι πρόταση, δηλαδή $\mathrm{free}(\varphi) = \emptyset$, τότε γράφουμε

$$L(\varphi) = \{w \in A^* \mid w \models \varphi\}.$$

Ας είναι φ και ψ τύποι της MSO λογικής από το A, τέτοιοι ώστε $\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\psi)$, και $\mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης. Οι φ και ψ θα ονομάζονται *ισοδύναμοι σε σχέση με το σύνολο* $\mathcal{V}$, και θα γράφουμε $\varphi \equiv \psi$, αν $L_{\mathcal{V}}(\varphi) = L_{\mathcal{V}}(\psi)$. Αν οι φ και ψ είναι προτάσεις της MSO λογικής από το A, τότε θα ονομάζονται ισοδύναμοι αν $L(\varphi) = L(\psi)$.

Λήμμα 2.6. *Ας είναι φ ένας τύπος της* MSO *λογικής από το A, και $\mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο μεταβλητών πρώτης και δεύτερης τάξης τέτοιο ώστε* $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$. *Τότε, για κάθε $(w, \sigma) \in N_{\mathcal{V}}$ έχουμε*

$$(w, \sigma) \models \varphi \quad \text{ανν} \quad (w, \sigma|_{\mathrm{free}(\varphi)}) \models \varphi$$

όπου $\sigma|_{\mathrm{free}(\varphi)}$ συμβολίζει τον περιορισμό της σ στο σύνολο $\mathrm{free}(\varphi)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m\}$ και $\mathrm{free}(\varphi) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}, X_{j_1}, \ldots, X_{j_t}\} \subseteq \mathcal{V}$. Θεωρούμε $(w, \sigma) \in N_{\mathcal{V}}$ τέτοιο ώστε $(w, \sigma) \models \varphi$. Εξ ορισμού, η σ αναθέτει τιμές σε όλες τις μεταβλητές του συνόλου $\mathcal{V}$ αλλά για να ελέγξουμε αν $(w, \sigma) \models \varphi$ μας ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές που ανατίθενται στις μεταβλητές του συνόλου $\mathrm{free}(\varphi)$. Καθώς λοιπόν από την υπόθεσή μας $(w, \sigma) \models \varphi$, συμπεραίνουμε ότι και $(w, \sigma|_{\mathrm{free}(\varphi)}) \models \varphi$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή αποδεικνύεται με παρόμοιο συλλογισμό. □

Λήμμα 2.7. *Ας είναι φ τύπος της MSO λογικής από το A, και $\mathcal{V}$ πεπερασμένο σύνολο μεταβλητών πρώτης και δεύτερης τάξης τέτοιο ώστε $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$. Τότε η γλώσσα $L_{\mathcal{V}}(\varphi)$ από το $A_{\mathcal{V}}$ είναι αναγνωρίσιμη ανν η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi)$ από το $A_{\mathrm{free}(\varphi)}$ είναι αναγνωρίσιμη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον αυστηρά αλφαβητικό ομομορφισμό

$$h : A_{\mathcal{V}}^* \to A_{\mathrm{free}(\varphi)}^*$$

που ‘‘σβήνει’’, για κάθε γράμμα του $A_{\mathcal{V}}$, τις συσνιστώσες που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του συνόλου $\mathcal{V} \setminus \mathrm{free}(\varphi)$. Υποθέτουμε αρχικά ότι η $L_{\mathcal{V}}(\varphi) \subseteq A_{\mathcal{V}}^*$ είναι αναγνωρίσιμη. Τότε $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) = h(L_{\mathcal{V}}(\varphi))$, και από την Πρόταση 1.18, συνάγουμε ότι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) \subseteq A_{\mathrm{free}(\varphi)}^*$ είναι αναγνωρίσμη.
Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi)$ είναι αναγνωρίσιμη. Καθώς $L_{\mathcal{V}}(\varphi) = h^{-1}(L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi)) \cap N_{\mathcal{V}}$, από τις Προτάσεις 1.18 και 1.19, συνάγουμε ότι η $L_{\mathcal{V}}(\varphi) \subseteq A_{\mathcal{V}}^*$ είναι αναγνωρίσιμη, και η απόδειξή μας τελείωσε. □

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των MSO-ορίσιμων γλωσσών.

Ορισμός 2.8. Μια γλώσσα $L \subseteq A^*$ θα ονομάζεται MSO-ορίσιμη αν υπάρχει πρόταση φ, της MSO λογικής, από το A τέτοια ώστε $L = L(\varphi)$. Θα συμβολίζουμε με $\mathrm{MSO}(A)$ τη κλάση όλων MSO-ορίσιμων γλωσσών από το A.

Το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα αποδεικνύει την σχέση μεταξύ των αναγνωρίσμων και MSO-ορίσιμων γλωσσών. Αποδείχτηκε ανεξάρτητα από τους Büchi (1960), Elgot (1961), και Trakhtenbrot (1961).

Θεώρημα 2.9 (Büchi-Elgot-Trakhtenbrot). *[2, 6, 12] Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε*

$$\mathrm{MSO}(A) = \mathrm{Rec}(A).$$

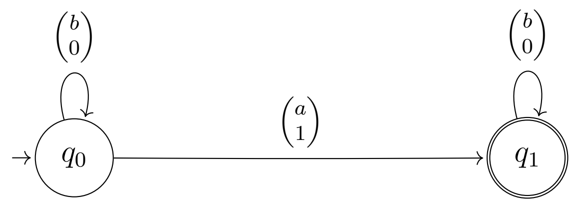
Η απόδειξη του θεωρήματός μας θα προκύψει από τις δύο επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 2.10. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε $\mathrm{MSO}(A) \subseteq \mathrm{Rec}(A)$.*

Απόδειξη. Ας είναι φ τύπος της MSO λογικής από το A, και $\mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο απο μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης τέτοιο ώστε $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$. Θα δείξουμε, με επαγωγή στη δομή του φ, ότι η $L_{\mathcal{V}}(\varphi) \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{V}}^*$ είναι αναγνωρίσιμη γλώσσα.

– $\varphi = \text{true}$. Τότε $L_{\mathcal{V}}(\text{true}) = N_{\mathcal{V}} \in \text{Rec}(A_{\mathcal{V}})$.

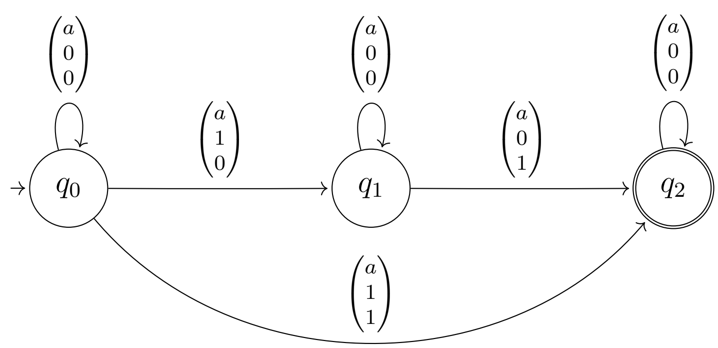
– $\varphi = P_a(x)$. Θεωρούμε το DFA $\mathcal{A}_\varphi$ του Σχήματος 2.2, με αλφάβητο εισόδου το $A_{\text{free}(\varphi)}$, όπου b στο γράμμα $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ συμβολίζει οποιοδήποτε γράμμα από το αλφάβητο A.



Σχήμα 2.2: Το DFA $\mathcal{A}_\varphi$ για τον τύπο $\varphi = P_a(x)$.

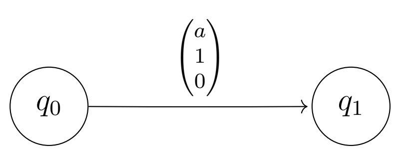
Είναι εύκολο να δούμε ότι $L(\mathcal{A}_\varphi) = L_{\text{free}(\varphi)}(\varphi)$. Έτσι η γλώσσα $L_{\text{free}(\varphi)}(\varphi) \subseteq A^*_{\text{free}(\varphi)}$ είναι αναγνωρίσιμη, και από το Λήμμα 2.7 και η γλώσσα $L_{\mathcal{V}}(\varphi) \subseteq A^*_{\mathcal{V}}$ είναι αναγνωρίσιμη.

– $\varphi = x \leq y$. Κατασκευάζουμε το DFA $\mathcal{A}_\varphi$ του Σχήματος 2.3

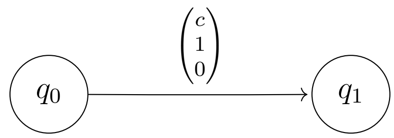


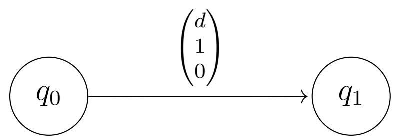
Σχήμα 2.3: Το DFA $\mathcal{A}_\varphi$ για τον τύπο $\varphi = x \leq y$.

με αλφάβητο εισόδου το $A_{\text{free}(\varphi)}$. Το a σε όλα τα γράμματα που εμφανίζονται στις μεταβάσεις του $\mathcal{A}_\varphi$ συμβολίζει όλα τα γράμματα του αλφαβήτου A. Για παράδειγμα, αν $A = \{c, d, f\}$, η εμφάνιση της μετάβασης

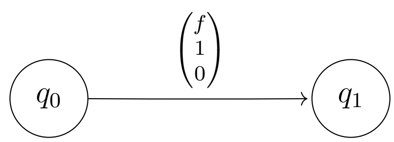


σημαίνει ότι στο $\mathcal{A}_\varphi$ υπάρχουν οι μεταβάσεις



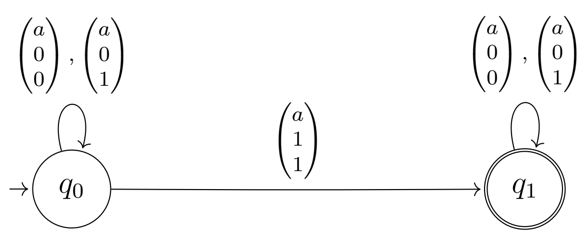


και



Είναι εύκολο να δούμε ότι $L(\mathcal{A}_\varphi) = L_{\text{free}(\varphi)}(\varphi)$. Έτσι η γλώσσα $L_{\text{free}(\varphi)}(\varphi) \subseteq A^*_{\text{free}(\varphi)}$ είναι αναγνωρίσιμη, και από το Λήμμα 2.7 η γλώσσα $L_{\mathcal{V}}(\varphi) \subseteq A^*_{\mathcal{V}}$ είναι αναγνωρίσιμη.

– $\varphi = x \in X$. Κατασκευάζουμε το DFA $\mathcal{A}_\varphi$ του Σχήματος 2.4



Σχήμα 2.4: Το DFA $\mathcal{A}_\varphi$ για τον τύπο $\varphi = x \in X$.

με αλφάβητο εισόδου το $A_{\text{free}(\varphi)}$. Το γράμμα a σε όλα τα γράμματα των μεταβάσεων του $\mathcal{A}_\varphi$ συμβολίζει όλα τα γράμματα του αλφαβήτου A. Είναι εύκολο να δούμε ότι $L(\mathcal{A}_\varphi) = L_{\text{free}(\varphi)}(\varphi)$. Έτσι η γλώσσα $L_{\text{free}(\varphi)}(\varphi) \subseteq A^*_{\text{free}(\varphi)}$ είναι αναγνωρίσιμη, και από το Λήμμα 2.7 και η γλώσσα $L_{\mathcal{V}}(\varphi) \subseteq A^*_{\mathcal{V}}$ είναι αναγνωρίσιμη.

– $\varphi = \neg\psi$ και υποθέτουμε ότι η γλώσσα $L_{\text{free}(\psi)}(\psi) \subseteq A^*_{\text{free}(\psi)}$ είναι αναγνωρίσιμη (υπόθεση της επαγωγής). Καθώς $\text{free}(\varphi) = \text{free}(\psi)$, ισχύει $A_{\text{free}(\psi)} =$

$A_{\mathrm{free}(\varphi)}$, και έχουμε

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \varphi\} \\ &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \neg\psi\} \\ &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \not\models \psi\} \\ &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \notin L_{\mathrm{free}(\psi)}(\psi)\} \\ &= N_{\mathrm{free}(\varphi)} \setminus L_{\mathrm{free}(\psi)}(\psi). \end{aligned}$$

Έτσι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi)$ προκύπτει ως η διαφορά δύο αναγνωρίσιμων γλωσσών, που σημαίνει ότι είναι και αυτή αναγνωρίσιμη.

– $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ και υποθέτουμε ότι οι γλώσσες $L_{\mathrm{free}(\varphi_1)}(\varphi_1) \subseteq A^*_{\mathrm{free}(\varphi_1)}$ και $L_{\mathrm{free}(\varphi_2)}(\varphi_2) \subseteq A^*_{\mathrm{free}(\varphi_2)}$ είναι αναγνωρίσιμες (υπόθεση της επαγωγής). Καθώς $\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\varphi_1) \cup \mathrm{free}(\varphi_2)$, από το Λήμμα 2.7 συνάγουμε ότι οι γλώσσες $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi_1), L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi_2)$ είναι αναγνωρίσιμες και ως γλώσσες του αλφαβήτου $A_{\mathrm{free}(\varphi)}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \varphi\} \\ &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \varphi_1 \text{ ή } (w,\sigma) \models \varphi_2\} \\ &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \varphi_1\} \cup \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \varphi_2\} \\ &= L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi_1) \cup L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi_2) \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}}(\varphi) \subseteq A^*_{\mathrm{free}(\varphi)}$ είναι αναγνωρίσιμη.

– $\varphi = \exists x.\psi$ και υποθέτουμε ότι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\psi)}(\psi) \subseteq A^*_{\mathrm{free}(\psi)}$ είναι αναγνωρίσιμη (υπόθεση της επαγωγής). Ισχύει $\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\psi) \setminus \{x\}$. Θεωρούμε τον αυστηρά αλφαβητικό ομομορφισμό

$$h : A^*_{\mathrm{free}(\psi)} \to A^*_{\mathrm{free}(\varphi)}$$

που ''σβήνει'' από κάθε γράμμα του $A_{\mathrm{free}(\psi)}$ τη συνιστώσα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x. Έχουμε

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \varphi\} \\ &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid \exists i \in \mathrm{dom}(w) \text{ τέτοιο ώστε } (w,\sigma[x \to i]) \models \psi\} \\ &= h(L_{\mathrm{free}(\psi)}(\psi)). \end{aligned}$$

Έτσι, από την Πρόταση 1.18, συνάγουμε ότι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) \subseteq A^*_{\mathrm{free}(\varphi)}$.

– $\varphi = \exists X.\psi$ και υποθέτουμε ότι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\psi)}(\psi) \subseteq A^*_{\mathrm{free}(\psi)}$ είναι αναγνωρίσιμη (υπόθεση της επαγωγής). Ισχύει $\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\psi) \setminus \{X\}$. Θεωρούμε τον αυστηρά αλφαβητικό ομομορφισμό

$$h : A^*_{\mathrm{free}(\psi)} \to A^*_{\mathrm{free}(\varphi)}$$

που ‘‘σβήνει’’ από κάθε γράμμα του αλφαβήτου $A_{\mathrm{free}(\psi)}$ τη συνιστώσα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή X. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid (w,\sigma) \models \varphi\} \\ &= \{(w,\sigma) \in N_{\mathrm{free}(\varphi)} \mid \exists I \subseteq \mathrm{dom}(w) \text{ τέτοιο ώστε } (w, \sigma[X \to I]) \models \psi\} \\ &= h(L_{\mathrm{free}(\psi)}(\psi)). \end{aligned}$$

Έτσι, από τη Πρόταση 1.18, συνάγουμε ότι η γλώσσα $L_{\mathrm{free}(\varphi)}(\varphi) \subseteq A^*_{\mathrm{free}(\varphi)}$ είναι αναγνωρίσμη.

Δείξαμε λοιπόν ότι αν η φ είναι πρόταση της MSO λογικής από το αλφάβητο A, τότε η γλώσσα $L(\varphi) \subseteq A^*$ είναι αναγνωρίσιμη. Άρα $\mathrm{MSO}(A) \subseteq \mathrm{Rec}(A)$ όπως το θέλαμε. □

Για την απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους (macros) της MSO λογικής:

- $\mathrm{first}(x) := \forall y.(x \leq y)$,
- $\mathrm{last}(x) := \forall y.(y \leq x)$,
- $x = y := (x \leq y) \wedge (y \leq x)$,
- $x < y := (x \leq y) \wedge \neg(x = y)$,
- $y = x + 1 := (x < y) \wedge \forall z.(z \leq x \vee y \leq z)$,
- $\varphi \to \psi := \neg\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$,
- $\mathrm{partition}(X_1, \ldots, X_n) := \forall x. \bigvee_{1 \leq i \leq n} \Big((x \in X_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq n} \neg(x \in X_j) \Big)$

Πρόταση 2.11. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε* $\mathrm{Rec}(A) \subseteq \mathrm{MSO}(A)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια αναγνωρίσιμη γλώσσα $L \in \mathrm{Rec}(A)$ και ένα CFA $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \Delta, F)$ που την αναγνωρίζει. Για κάθε μετάβαση $(q, a, q') \in \Delta$ θεωρούμε μια μεταβλητή δεύτερης τάξης $X_{(q,a,q')}$ και θέτουμε

$$\mathcal{V} = \{X_{(q,a,q')} \mid (q, a, q') \in \Delta\}.$$

Ας είναι

$$\mathcal{V} = \{X_1, \ldots, X_m\}$$

μια απαρίθμηση του συνόλου $\mathcal{V}$. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω τύπο της MSO λογικής:

$$\begin{aligned}\psi(X_1,\ldots,X_m) = \mathrm{partition}(X_1,\ldots X_m)\wedge \\ \forall x.\forall y.\left((y=x+1)\to \bigvee_{q,q',p\in Q,a,b\in A}((x\in X_{(q,a,q')})\wedge(y\in X_{(q',b,p)}))\right)\wedge \\ \bigwedge_{(q,a,q')\in\Delta}\forall x.(x\in X_{(q,a,q')}\to P_a(x))\wedge \\ \exists x.\left(\mathrm{first}(x)\wedge\bigvee_{\substack{a\in A\\ q\in Q}}(x\in X_{(q_0,a,q)})\right)\wedge \\ \exists y.\left(\mathrm{last}(y)\wedge\bigvee_{a\in A,q\in Q,q'\in F}(y\in X_{(q,a,q')})\right).\end{aligned}$$

Ας είναι $w=a_0\ldots a_{n-1}\in L$, δηλαδή η w αναγνωρίζεται από το CFA $\mathcal{A}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει επιτυχής διαδρομή $P_w=((q_i,a_i,q_{i+1}))_{0\le i\le n-1}$ του $\mathcal{A}$ στην w. Θεωρούμε την $(\mathcal{V},w)$-ανάθεση $\sigma(P_w)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma(P_w)(X_{(q,a,q')})=\{i\in\mathrm{dom}(w)\mid (q_i,a_i,q_{i+1})=(q,a,q')\}$$

για κάθε $X_{(q,a,q')}\in\mathcal{V}$. Καθώς η P_w είναι επιτυχής διαδρομή, από την δομή του τύπου ψ συνάγουμε ότι

$$(w,\sigma(P_w))\models\psi(X_1,\ldots,X_m).$$

Αντίστροφα, ας είναι σ μια $(\mathcal{V},w)$-ανάθεση τέτοια ώστε $(w,\sigma)\models\psi(X_1,\ldots,X_m)$. Από τη σ κατασκευάζουμε μια διαδρομή $P_w(\sigma)=((q_i,a_i,q_{i+1}))_{0\le i\le n-1}$ του $\mathcal{A}$ στην w ως εξής. Για κάθε $0\le i\le n-1$ θέτουμε

$$(q_i,a_i,q_{i+1})=(q,a,q')$$

όπου

$$i\in\sigma(X_{(q,a,q')}).$$

Καθώς η (w,σ) ικανοποιεί τον υποτύπο $\mathrm{partition}(X_1,\ldots X_m)$ η μετάβαση (q_i,a_i,q_{i+1}), για κάθε $0\le i\le n-1$, ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Επίσης η (w,σ) ικανοποιεί τον υποτύπο

$$\forall x.\forall y.\left((y=x+1)\to\bigvee_{q,q',p\in Q,a,b\in A}((x\in X_{(q,a,q')})\wedge(y\in X_{(q',b,p)}))\right)$$

και έτσι εξασφαλίζεται η διαδοχή των μεταβάσεων. Η δομή της λέξης $w = a_0 \dots a_{n-1}$ εξασφαλίζεται από την ικανοποιησιμότητα του υποτύπου

$$\bigwedge_{(q,a,q')\in\Delta} \forall x.(x \in X_{(q,a,q')} \to P_a(x)).$$

Τέλος η διαδρομή $P_w(\sigma) = ((q_i, a_i, a_{i+1}))_{0\leq i\leq n-1}$ είναι επιτυχής εφόσον η (w,σ) ικανοποιεί τον υποτύπο

$$\exists x. \left(\mathrm{first}(x) \wedge \bigvee_{\substack{a\in A\\ q\in Q}} (x \in X_{(q_0,a,q)}) \right) \wedge \exists y. \left(\mathrm{last}(y) \wedge \bigvee_{a\in A, q\in Q, q'\in F} (y \in X_{(q,a,q')}) \right).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε λέξη $w = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$ υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των επιτυχών διαδρομών του $\mathcal{A}$ στη w και των $(\mathcal{V}, w)$-αναθέσεων που ικανοποιούν τον τύπο $\psi(X_1, \dots, X_m)$. Θεωρούμε τώρα την πρόταση της MSO λογικής

$$\xi = \exists X_1. \dots \exists X_m.\psi(X_1, \dots, X_m)$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} w \models \xi \quad &\text{ανν} \quad \text{υπάρχει } (\mathcal{V}, w)\text{-ανάθεση } \sigma \text{ τέτοια ώστε } (w,\sigma) \models \psi(X_1, \dots, X_m) \\ &\text{ανν} \quad \text{υπάρχει επιτυχής διαδρομή του } \mathcal{A} \text{ στην } w \\ &\text{ανν} \quad w \in L. \end{aligned}$$

Έτσι, για κάθε $w \in A^*$, με $w \neq \varepsilon$, έχουμε $w \in L(\xi)$ ανν $w \in L(\mathcal{A})$.
Αν η $\varepsilon \in L$, τότε θεωρούμε την πρόταση $\zeta = \forall x.(\neg(x \leq x))$ της MSO λογικής. Η πρόταση αυτή ικανοποιείται μόνο από της κενή λέξη, δηλαδή $w \models \zeta$ ανν $w = \varepsilon$.
Τέλος, θεωρούμε την πρόταση

$$\varphi = \begin{cases} \xi & \text{αν } \varepsilon \notin L \\ \xi \vee \zeta & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

της MSO λογικής, και συνάγουμε ότι $w \in L$ ανν $w \models \varphi$ που σημαίνει ότι $L = L(\varphi)$.
Έτσι $L \in \mathrm{MSO}(A)$, και συνεπώς $\mathrm{Rec}(A) \subseteq \mathrm{MSO}(A)$ όπως το θέλαμε. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.9. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 2.10 και 2.11. □

Πόρισμα 2.12. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε*

$$\mathrm{MSO}(A) = \mathrm{Rec}(A) = \mathrm{Rat}(A).$$

Παράδειγμα 2.13. *Παρουσιάζουμε παραδείγματα αναγνωρισίμων γλωσσών και των αντίστοιχων προτάσεων της MSO λογικής.*

– *Ας είναι* $A = \{a, b\}$ *και* $L = (ab)^*$ *Μία πρόταση* φ *της* MSO *λογικής, τέτοια ώστε* $L(\varphi) = L$ *είναι η εξής:*

$$\begin{aligned}\varphi = \exists x.(\mathrm{first}(x) \wedge P_a(x)) \wedge \exists y.(\mathrm{last}(y) \wedge P_b(y)) \wedge \\ \forall z.\forall u.\big(u = z + 1 \rightarrow ((P_a(z) \wedge P_b(u)) \vee (P_b(z) \wedge P_a(u)))\big) \vee \\ \forall v.(\neg v \leq v).\end{aligned}$$

– *Ας είναι* $A = \{a, b, c\}$ *και* $L = (abc)^*$ *. Μια πρόταση* φ *της* MSO *λογικής τέτοια ώστε* $L(\varphi) = L$ *είναι η ακόλουθη:*

$$\begin{aligned}\varphi = \exists x.(\mathrm{first}(x) \wedge P_a(x)) \wedge \exists y.(\mathrm{last}(y) \wedge P_c(y)) \wedge \\ \forall z.\forall u.\big(u = z + 1 \rightarrow ((P_a(z) \wedge P_b(u)) \vee (P_b(z) \wedge P_c(u)) \vee \\ (P_c(z) \wedge P_a(u)))\big) \vee \forall v.(\neg v \leq v).\end{aligned}$$

– *Ας είναι* $A = \{a\}$ *και* $L = (aa)^+$*. Μια πρόταση* φ *της* MSO *λογικής τέτοια ώστε* $L(\varphi) = L$ *είναι η εξής:*

$$\begin{aligned}\varphi = \exists X.\exists Y.(\mathrm{partition}(X, Y) \wedge \\ \exists x.(\mathrm{first}(x) \wedge x \in X) \wedge \exists y.(\mathrm{last}(y) \wedge y \in Y) \wedge \\ \forall z.\forall u.\big(z = u + 1 \rightarrow ((z \in X \wedge u \in Y) \vee (z \in Y \wedge u \in X))\big) \wedge \\ \forall v.P_a(v).\end{aligned}$$

– *Ας είναι* $A = \{a, b, c\}$ *και* $L = a(a \cup b \cup cb)^*b$*. Μια πρόταση* φ *της* MSO *λογικής τέτοια ώστε* $L(\varphi) = L$ *είναι η εξής:*

$$\begin{aligned}\varphi = \exists x.(\mathrm{first}(x) \wedge P_a(x)) \wedge \exists y.(\mathrm{last}(y) \wedge P_b(y)) \wedge \\ \forall z.\big(((x < z) \wedge (z < y)) \rightarrow (P_c(z) \rightarrow P_b(z + 1))\big).\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1) Κατασκευάστε πεπερασμένα αυτόματα για τις αναγνωρίσιμες γλώσσες του Παραδείγματος 2.13, και στη συνέχεια κατασκευάστε τις αντίστοιχες προτάσεις της MSO λογικής ακολουθώντας την κατασκευή της απόδειξης της Πρότασης 2.11.

2) Δίνεται αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$. Να κατασκευάσετε για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες L, πρόταση φ της MSO λογικής από το A, τέτοια ώστε $L(\varphi) = L$.

   i) $L = d(ab)^+c$,
   ii) $L = cda(bda)^*c^2$,
   iii) $L = a^*b^*$,
   iv) $L = a^*b^*c^*$,
   v) $L = ca^*b^*$,
   vi) $L = (ccc)^+$,
   vii) $L = a(ccc)^+$,
   ix) $L = a(ccc)^+b$,
   x) $L = a(ccc)^+bf$.

3) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις φ, της MSO λογικής, να βρείτε τη γλώσσα $L(\varphi)$.

   i) $w \models \exists x.\exists y.(P_a(x) \wedge P_c(y) \wedge (x \leq y))$
   ii) $\varphi = \exists x.(P_c(x) \wedge \forall y.(x \leq y))$
   iii) $\varphi = \exists x.\exists y.(P_a(x) \wedge P_c(y) \wedge \forall z.((x \leq z) \wedge (z \leq y)))$
   iv) $\varphi = \exists x.(P_b(x) \wedge \exists y.(P_c(y) \wedge (y = x + 1)) \wedge \forall z.(x \leq z))$
   v) $\varphi = \exists X.\forall x.(x \in X \to P_a(x))$
   vi) $\varphi = \exists X.\exists Y.\exists x.\exists y.\Big(\big((x \in X) \wedge (y \in Y) \wedge (x < y)\big) \to (P_a(x) \wedge P_c(y))\Big)$

4) Ας είναι ψ τύπος της MSO λογικής και πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{V}$ από μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης, τέτοιο ώστε $\mathrm{free}(\psi) \subseteq \mathcal{V}$. Θέτουμε $\varphi = \forall x.\psi$. Αν $L_{\mathcal{V}}(\psi) \in \mathrm{Rec}(A_{\mathcal{V}})$, να δείξετε ότι $L_{\mathcal{V}\setminus\{x\}}(\varphi) \in \mathrm{Rec}(A_{\mathcal{V}\setminus\{x\}})$.

5) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L, M \in \mathrm{MSO}(A)$. Να δείξετε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = M$ ή όχι.

6) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L \in \mathrm{MSO}(A)$. Να δείξετε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = A^*$ ή όχι.

7) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L \in \mathrm{MSO}(A)$. Να δείξετε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = \emptyset$ ή όχι.

8) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $\mathcal{V}$ πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης και δεύτερης τάξης. Για κάθε μεταβλητή πρώτης τάξης $x \in \mathcal{V}$, θέτουμε

$$A_{\mathcal{V}}^{x=1} = \{(a, \tau) \in A_{\mathcal{V}} \mid \tau(x) = 1\}$$

και

$$A_{\mathcal{V}}^{x=0} = A_{\mathcal{V}} \setminus A_{\mathcal{V}}^{x=1}.$$

Να δείξετε οτι

$$N_{\mathcal{V}} = \bigcap_{x \in \mathcal{V}} \left(A_{\mathcal{V}}^{x=0}\right)^* A_{\mathcal{V}}^{x=1} \left(A_{\mathcal{V}}^{x=0}\right)^*.$$

Κεφάλαιο 3

Λογική πρώτης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την μοναδιακή[1] λογική πρώτης τάξης. Προκύπτει άμεσα από την μοναδιακή λογική δεύτερης τάξης αν παραλείψουμε τον ατομικό τύπο $x \in X$ και τους υπαρξιακούς και καθολικούς ποσοδείκτες δεύτερης τάξης, δηλαδή τους $\exists X$ και $\forall X$. Χάριν πληρότητας, παραθέτουμε στη συνέχεια τον ορισμό της σύνταξης και της σημασιολογίας της λογικής πρώτης τάξης.

Ορισμός 3.1 (Συντακτικό των τύπων της FO λογικής)**.** Ας είναι A ένα αλφάβητο. Το συντακτικό των τύπων της *(μοναδιακής) λογικής δεύτερης τάξης* (first-order logic, σύντομα FO λογικής) *από το A* δίνεται από τη γραμματική

$$\varphi := \mathrm{true} \mid P_a(x) \mid x \leq y \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x.\varphi,$$

όπου $a \in A$, x, y είναι μεταβλητές πρώτης τάξης, $\neg$ είναι ο τελεστής της άρνησης, $\vee$ είναι ο τελεστής της διάζευξης, και $\exists x$ είναι ο υπαρξιακός ποσοδείκτης πρώτης τάξης.

Θέτουμε

– $\mathrm{false} = \neg\mathrm{true}$,

– $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$,
όπου $\wedge$ είναι ο τελεστής της σύζευξης,

– $\forall x.\varphi = \neg\exists x.\neg\varphi$, όπου $\forall x$ είναι ο καθολικός ποσοδείκτης πρώτης τάξης.

Το σύνολο $\mathrm{free}(\varphi)$ των ελεύθερων μεταβλητών ενός τύπου φ της FO λογικής από το A, ορίζεται επαγωγικά στην δομή του $\mathrm{free}(\varphi)$, όπως ακριβώς στην περίπτωση των τύπων της MSO λογικής.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της σημασιολογίας των τύπων της FO λογικής.

[1] Συνήθως ο όρος ''μοναδιακή'' παραλείπεται στην λογική πρώτης τάξης.

Ορισμός 3.2 (Σημασιολογία των τύπων της FO λογικής)**.** Ας είναι φ τύπος της FO λογικής από το αλφάβητο A, και $\mathcal{V}$ πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης τάξης τέτοιο ώστε $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$. Τότε για κάθε $w \in A^*$ και $(\mathcal{V}, w)$-ανάθεση σ, ορίζοουμε την σχέση ικανοποιησιμότητας $(w, \sigma) \models \varphi$ επαγωγικά στη δομή του φ ως εξής:

- $(w, \sigma) \models \mathrm{true}$,
- $(w, \sigma) \models P_a(x)$ ανν $w(\sigma(x)) = a$,
- $(w, \sigma) \models x \leq y$ ανν $\sigma(x) \leq \sigma(y)$,
- $(w, \sigma) \models \neg\varphi$ ανν $(w, \sigma) \not\models \varphi$,
- $(w, \sigma) \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ ανν $(w, \sigma) \models \varphi_1$ ή $(w, \sigma) \models \varphi_2$,
- $(w, \sigma) \models \exists x.\varphi$ ανν υπάρχει $i \in \mathrm{dom}(w)$ τέτοιο ώστε $(w, \sigma[x \to i]) \models \varphi$.

Ένας τύπος φ της FO λογικής από το A θα ονομάζεται πρόταση, αν $\mathrm{free}(\varphi) = \emptyset$. Στην περίπτωση αυτή (καθώς ο φ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές και συνεπώς δεν χρειάζεται κάποια ανάθεση) θα γράφουμε $w \models \varphi$, αν η λέξη $w \in A^*$ ικανοποιεί την φ.

Για κάθε τύπο φ της FO λογικής από το A, και κάθε πεπερασμένο σύνολο μεταβλητών πρώτης τάξης $\mathcal{V}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$, θέτουμε

$$L_{\mathcal{V}}(\varphi) = \{(w, \sigma) \in N_{\mathcal{V}} \mid (w, \sigma) \models \varphi\}$$

Ειδικότερα αν ο τύπος φ είναι πρόταση, δηλαδή $\mathrm{free}(\varphi) = \emptyset$, τότε γράφουμε

$$L(\varphi) = \{w \in A^* \mid w \models \varphi\}.$$

Ας είναι φ και ψ τύποι της FO λογικής από το A, τέτοιοι ώστε $\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\psi)$, και $\mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης τάξης. Οι φ και ψ θα ονομάζονται *ισοδύναμοι σϵ σχέση μϵ το σύνολο* $\mathcal{V}$, και θα γράφουμε $\varphi \equiv \psi$, αν $L_{\mathcal{V}}(\varphi) = L_{\mathcal{V}}(\psi)$. Αν οι φ και ψ είναι προτάσεις της FO λογικής από το A, τότε θα ονομάζονται ισοδύναμοι αν $L(\varphi) = L(\psi)$.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των FO-ορίσιμων γλωσσών.

Ορισμός 3.3. Μια γλώσσα $L \subseteq A^*$ θα ονομάζεται FO-ορίσιμη αν υπάρχει πρόταση φ, της FO λογικής, από το A τέτοια ώστε $L = L(\varphi)$. Θα συμβολίζουμε με $\mathrm{FO}(A)$ τη κλάση όλων MSO-ορίσιμων γλωσσών από το A.

Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε αλφάβητο A ισχύει $\mathrm{FO}(A) \subseteq \mathrm{MSO}(A)$. Πράγματι αν $L \in \mathrm{FO}(A)$, τότε υπάρχει πρόταση φ της FO λογικής τέτοια ώστε $L = L(\varphi)$. Η φ όμως είναι και πρόταση της MSO λογικής, και συνεπώς η $L \in \mathrm{MSO}(A)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν $A = \{a\}$, η γλώσσα $L = (aa)^+$ είναι MSO-ορίσιμη αλλά όχι FO-ορίσιμη.

Ασκήσεις

1) Ας είναι A ένα αλφάβητο. Να δείξετε ότι η κλάση $\mathrm{FO}(A)$ είναι κλειστή με τις πράξεις της ένωσης και της τομής, δηλαδή για κάθε $L_1, L_2 \in \mathrm{FO}(A)$ και οι γλώσσες $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2 \in \mathrm{FO}(A)$.

2) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$ και η πρόταση

$$\varphi = \exists x. \Big(P_c(x) \wedge \forall y. \big((x < y) \to P_c(y) \big) \Big)$$

της FO λογικής από το A. Να βρείτε τη γλώσσα $L(\varphi)$.

3) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$ και η γλώσσα

$$L = (a \cup b \cup c \cup d \cup f)^* c^+.$$

Να βρείτε πρόταση φ της FO λογικής από το A, τέτοια ώστε $L(\varphi) = L$.

4) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L \in \mathrm{FO}(A)$. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = A^*$ ή όχι.

Κεφάλαιο 4

Γραμμική χρονική λογική

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη γραμμική χρονική λογική (linear temporal logic, σύντομα LTL). Θα δείξουμε ότι οι τύποι της LTL από ένα αλφάβητο είναι εκφραστικά ισοδύναμοι με τις προτάσεις της FO λογικής από το ίδιο αλφάβητο.

Ας είναι A ένα αλφάβητο. Για κάθε γράμμα $a \in A$ θεωρούμε μια ατομική πρόταση p_a και θέτουμε $P = \{p_a \mid a \in A\}$. Υπενθυμίζουμε ότι μια λέξη

$$w = a_0 \dots a_{n-1}$$

με $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$, μπορούμε να την γράφουμε ως

$$w = w(0) \dots w(n-1).$$

Θέτουμε δηλαδή $w(0) = a_0, \dots, w(n-1) = a_{n-1}$. Για κάθε $0 \le i \le n-1$ θα γράφουμε $w_{\ge i}$ για τη λέξη $w_i w_{i+1} \dots w_{n-1}$, δηλαδή

$$w_{\ge i} = w_i w_{i+1} \dots w_{n-1}.$$

Έτσι

$$w_{\ge 0} = w_0 \dots w_{n-1} = w$$

ενώ

$$w_{\ge n-1} = w_{n-1}$$

και

$$w_{\ge n} = \varepsilon.$$

Θα παρουσιάσουμε αρχικά, με διαισθητικό τρόπο, παραδείγματα από τύπους της LTL.

Παράδειγμα 4.1. *Για τα παραδείγματά μας θα χρησιμοποιήσουμε το αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$, οπότε το σύνολο των αντίστοιχων ατομικών προτάσεων θα είναι το $P = \{p_a, p_b, p_c, p_d, p_f\}$.*

– *Ο* p_a *είναι τύπος της* LTL. *Ο τύπος αυτός ικανοποιείται από μια λέξη* $w = w(0)\dots w(n-1)$ *αν το πρώτο της γράμμα είναι το* a, *αν δηλαδή* $w(0) = a$. *Θα γράφουμε* $w \models p_a$.

– *Ο τύπος* $\bigcirc p_b$ *είναι τύπος της* LTL, *και ικανοποιείται από μια λέξη* w *αν το δεύτερο γράμμα της είναι* b, *δηλαδή* $w(1) = b$. *Θα γράφουμε* $w \models \bigcirc p_b$.

– *Η λέξη* $w = cadff$ *ικανοποιεί τον τύπο* $\varphi = p_c \wedge \bigcirc p_a$ *της* LTL.

– *Η λέξη* $w = cadff$ *ικανοποιεί τον τύπο* $\varphi = p_c \wedge \bigcirc p_a \wedge \bigcirc\bigcirc p_d$ *της* LTL.

– *Ο τύπος* $\Box p_b$ *της* LTL *ικανοποιείται από μια λέξη* $w \in A^*$, *αν η λέξη έχει σε κάθε θέση της το γράμμα* b, *καθώς ο τελεστής* $\Box$ *σημαίνει "πάντα"* ("always"). *Για παράδειγμα*

$$bbbb \models \Box p_b.$$

– *Ο τελεστής* $\cup$ *της* LTL *ονομάζεται* "until" *και η σημασία του είναι "μέχρι". Για παράδειγμα ο τύπος* $\varphi = p_a \cup p_c$ *θα ικανοποιείται από μια λέξη που έχει ένα τουλάχιστο γράμμα* c *αλλά όλα τα προηγούμενα του* c *θα είναι* a. *Έτσι*

$$aaaacbd \models \varphi,$$

αλλά

$$aaaafdcbd \not\models \varphi$$

καθώς μετά τα a *και πρίν το* c *υπάρχουν τα* f *και* d. *Αν δούμε λίγο πιο προσεκτικά την*

$$aaaacbd \models p_a \cup p_c$$

μπορούμε να γράψουμε πιο αυστηρά:

"*για τη λέξη* $w = aaaacbd = w(0)w(1)\dots w(6)$ *υπάρχει δείκτης* $i(=4)$ *τέτοιος ώστε* $w(i) = c$ *δηλαδή* $w_{\geq i} \models p_c$, *και για κάθε* $0 \leq j < i$ *ισχύει* $w(j) = a$ *δηλαδή* $w_{\geq j} \models p_a$".

– *Θεωρούμε τον τύπο* $\varphi = p_b \cup (\Box p_f)$ *της* LTL. *Η λέξη* $w = bbbbbfffffff$ *ικανοποιεί την* φ *δηλαδή*

$$bbbbbfffffff \models p_b \cup (\Box p_f)$$

καθώς υπάρχει δείκτης $i(=5)$ *τέτοιος ώστε* $w(i) = f$ *και για κάθε* $i < k \leq 11$ *έχουμε* $w(k) = f$, *ενώ* $w_{\geq j} \models p_b$ *για κάθε* $0 \leq j < i$.
Όμως

$$b^4 f^7 d \not\models p_b \cup (\Box p_f),$$
$$b^4 f^7 d f^4 \not\models p_b \cup (\Box p_f)$$

και

$$b^4 a f^7 \not\models p_b \cup (\Box p_f).$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

– *Θεωρούμε τον τύπο* $\varphi = (p_a \cup p_c) \vee \Box p_c$ *της* LTL. *Τότε*

$$a^3c^4 \models \varphi$$

και

$$c^5 \models \varphi.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

– *Θεωρούμε τον τύπο* $\varphi = (p_a \cup p_c) \wedge \Box p_c$ *της* LTL. *Τότε*

$$a^3c^4 \not\models \varphi$$

αλλά

$$c^5 \models \varphi.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

– *Θεωρούμε ένα τύπο* φ *της* LTL. *Ισχυριζόμαστε ότι οι τύποι της* LTL

$$\psi = \Box\varphi$$

και

$$\psi' = \varphi \wedge \bigcirc\Box\varphi$$

είναι ισοδύναμοι, δηλαδή κάθε λέξη $w \in A^*$ *ικανοποιεί τον* ψ *ανν ικανοποιεί τον* ψ'. *Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;*

– *Ο τελεστής* $\Diamond$ *της* LTL *σημαίνει ''τελικά στο μέλλον''* "eventually". *Για παράδειγμα*

$$bgdc^3adb \models \Diamond p_a$$

καθώς υπάρχει δείκτης $i(=6)$ *έτσι ώστε* $w(i) = a$, *ενώ*

$$bbabf \not\models \Diamond(p_c \vee p_d).$$

– *Θεωρούμε τον τύπο* $\varphi = \Diamond\Box p_b$ *της* LTL. *Ισχυριζόμαστε ότι*

$$a^3dfb^4 \models \varphi$$

και

$$b^{10} \models \varphi$$

αλλά

$$a^3dfb^4c \not\models \varphi.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

– *Θεωρούμε τον τύπο* $\varphi = \Box\Diamond p_b$ *της* LTL. *Ισχυριζόμαστε ότι*

$$a^2c^3dbfadbcb \models \varphi$$

καθώς για κάθε δείκτη $0 \leq i \leq 12$ *υπάρχει δείκτης* $i \leq j \leq 12$ *έτσι ώστε* $w(j) = b$. *Αλλά*

$$a^2c^3dbfadbccd \not\models \varphi.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

– *Ο τύπος* true *της* LTL *ικανοποιείται από κάθε λέξη του* A^*. *Θεωρούμε οποιοδήποτε τύπο* φ *της* LTL *και τον τύπο*

$$\psi = \mathrm{true} \cup \varphi.$$

Μια λέξη $w = w(0)\ldots w(n-1) \in A^*$ *θα ικανοποιεί τον* ψ *αν υπάρχει δείκτης* $0 \leq i \leq n-1$ *τέτοιος ώστε* $w_{\geq i} \models \varphi$. *Για παράδειγμα, αν* $\varphi = p_a$, *τότε*

$$bcdafd \models \psi$$

αλλά

$$cd^3b^4f \not\models \psi.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό της σύνταξης των τύπων της LTL.

Ορισμός 4.2 (Συντακτικό των τύπων της LTL)**.** Ας είναι A ένα αλφάβητο. Για κάθε γράμμα $a \in A$ θεωρούμε μια ατομική πρόταση p_a και θέτουμε $P = \{p_a \mid a \in A\}$. Το συντακτικό των τύπων φ της *γραμμικής χρονικής λογικής* (*linear temporal logic*, σύντομα LTL) *από το* A δίνεται από τη γραμματική

$$\varphi ::= \mathrm{true} \mid p_a \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \bigcirc\varphi \mid \varphi \cup \varphi$$

όπου $p_a \in P$, $\bigcirc$ είναι ο τελεστής next, και $\cup$ είναι ο τελεστής until.

Θέτουμε
false $= \neg$true,
$\varphi \wedge \psi = \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
και
$\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$,
όπου φ, ψ είναι τύποι της LTL από το A.
Οι τύποι $\Diamond\varphi$ (''eventually φ'') και $\Box\varphi$ (''always φ''), για οποιονδήποτε τύπο φ της LTL από το A, ορίζονται αντίστοιχα ως εξής:
$\Diamond\varphi = \mathrm{true} \cup \varphi$
και
$\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$.
Μπορούμε να ορίσουμε τώρα και τη σημασιολογία των τύπων της LTL.

Ορισμός 4.3 (Σημασιολογία των τύπων της LTL)**.** Ας είναι φ τύπος της LTL από το αλφάβητο A. Τότε για κάθε $w = w(0) \dots w(n-1) \in A^*$ ορίζουμε τη σχέση ικανοποιησιμότητας $w \models \varphi$ επαγωγικά στη δομή του φ ως εξής:

- $w \models \text{true}$,
- $w \models p_a$ ανν $w(0) = a$,
- $w \models \neg\varphi$ ανν $w \not\models \varphi$,
- $w \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ ανν $w \models \varphi_1$ ή $w \models \varphi_2$,
- $w \models \bigcirc\varphi$ ανν $w_{\geq 1} \models \varphi$,
- $w \models \varphi_1 \cup \varphi_2$ ανν υπάρχει δείκτης $0 \leq i \leq n-1$ τέτοιος ώστε $w_{\geq i} \models \varphi_2$ και $w_{\geq j} \models \varphi_1$ για κάθε $0 \leq j < i$.

Από τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει άμεσα, ότι για κάθε λέξη $w = w(0) \dots w(n-1) \in A^*$ ισχύει

$w \models \Diamond\varphi$ ανν υπάρχει δείκτης $0 \leq i \leq n-1$ τέτοιος ώστε $w_{\geq i} \models \varphi$

και

$w \models \Box\varphi$ ανν $w_{\geq i} \models \varphi$ για κάθε $0 \leq i \leq n-1$.

Πράγματι, για κάθε $w = w(0) \dots w(n-1) \in A^*$ ισχύει

$$\begin{aligned} w \models \Diamond\varphi \ &\text{ανν} \ w \models \text{true} \cup \varphi \\ &\text{ανν} \ \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models \varphi \text{ και} \\ &\qquad w_{\geq j} \models \text{true για κάθε } 0 \leq j < i \\ &\text{ανν} \ \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models \varphi \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία ισχύει καθώς ο τύπος true επαληθεύεται από κάθε λέξη του A, και

$$\begin{aligned} w \models \Box\varphi \ &\text{ανν} \ w \models \neg\Diamond\neg\varphi \\ &\text{ανν} \ w \not\models \Diamond\neg\varphi \\ &\text{ανν} \ w_{\geq i} \not\models \neg\varphi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\ &\text{ανν} \ w_{\geq i} \models \neg\neg\varphi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\ &\text{ανν} \ w_{\geq i} \models \varphi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα δείξουμε πως μπορούμε με τη χρήση τύπων της LTL να ελέγξουμε πότε η λειτουργία ενός συστήματος ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα που απαιτείται να έχει.

Παράδειγμα 4.4 (Το πρόβλημα του αμοιβαίου αποκλεισμού)**.** *Θεωρούμε ένα σύστημα που εκτελεί παράλληλα δύο διεργασίες (processes), την $Proc_1$ και την $Proc_2$. Το σύστημα λειτουργεί ικανοποιητικά αν η εκτέλεση των δύο δειργασιών* *φτάσει τουλάχιστο μία φορά, σε κάποιο τμήμα της που ονομάζεται κρίσιμο (critical section). Ονομάζουμε* cr_1 *το κρίσιμο τμήμα της* $Proc_1$ *και* cr_2 *το κρίσιμο τμήμα της* $Proc_2$. *Κάθε διεργασία* i $(i = 1, 2)$, *μπορεί να βρίσκεται είτε στο κρίσιμο τμήμα της* cr_i, *είτε στην κατάσταση αναμονής* wt_i *για να υλοποιήσει το κρίσιμο τμήμα της, είτε σε οποιοδήποτε άλλο, εκτός του κρίσιμου, τμήμα της που συμβολίζεται με* $\neg cr_i$. *Το σύστημα λειτουργεί με ασφάλεια, αν και οι δύο διεργασίες δεν βρίσκονται ταυτόχρονα στο κρίσιμο τμήμα τους, ικανοποιούν δηλαδή την συνθήκη του αμοιβαίου αποκλεισμού (mutual exclusion). Κάθε διεργασία θα πρέπει να φτάσει "κάποια στιγμή" στην κατάσταση αναμονής της και στη συνέχεια θα φτάσει "κάποια στιγμή" στο κρίσιμο τμήμα της. Ο επόμενος πίνακας δείχνει όλους τους συνδιασμούς καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρίσκεται η εκτέλεση των δύο διεργασιών (πρώτη και δεύτερη στήλη αντίστοιχα). Ονομάζουμε κάθε τέτοιο συνδιασμό με ένα γράμμα (τρίτη στήλη) και προκύπτει ένα αλφάβητο* $A = \{a, b, c, d, e, f, g, q, r\}$.

$Proc_1$	$Proc_2$	$Alphabet$
cr_1	cr_2	a
cr_1	$\neg cr_2$	b
$\neg cr_1$	cr_2	c
$\neg cr_1$	$\neg cr_2$	d
wt_1	cr_2	e
wt_1	$\neg cr_2$	f
wt_1	wt_2	g
cr_1	wt_2	q
$\neg cr_1$	wt_2	$r.$

Έτσι το σύνολο P *των ατομικών προτάσεων, για το αλφάβητο* A, *είναι το*

$$P = \{p_a, p_b, p_c, p_d, p_e, p_f, p_g, p_q, p_r\}.$$

Θεωρούμε τον τύπο

$$\varphi_1 = \Box \neg p_a$$

από το A. *Κάθε λέξη που τον ικανοποιεί εγγυάται ότι δεν μπορούν και οι δύο διεργασίες να βρίσκονται ταυτόχρονα στο κρίσιμο τμήμα τους (mutual exclusion). Επίσης κάθε λέξη που ικανοποιεί τον τύπο*

$$\varphi_2 = \Diamond\big((p_e \vee p_f \vee p_g) \cup (p_b \vee p_q)\big) \wedge \Diamond\big((p_g \vee p_q \vee p_r) \cup (p_c \vee p_e)\big)$$

από το A, *εξασφαλίζει ότι κάθε διεργασία θα βρεθεί κάποια στιγμή στην κατάσταση αναμονής της, και στη συνέχεια κάποια στιγμή θα βρεθεί στο κρίσιμο τμήμα της. Θεωρούμε τον τύπο*

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

από το A.

Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι κάθε λέξη από το A *που ικανοποιεί τον* φ *είναι αποδεκτή για την ορθή εκτέλεση του συστήματος των δύο διεργασιών.*

Για κάθε τύπο φ της LTL από ένα αλφάβητο A θέτουμε

$$L(\varphi) = \{w \in A^* \mid w \models \varphi.\}$$

Ορισμός 4.5. Μια γλώσσα $L \subseteq A^*$ θα ονομάζεται LTL-ορίσιμη αν υπάρχει τύπος φ της LTL από το A τέτοιος ώστε $L = L(\varphi)$. Θα συμβολίζουμε με LTL(A) την κλάση όλων των LTL-ορίσιμων γλωσσών από το A.

Δύο τύποι φ και ψ της LTL από το αλφάβητο A, θα ονομάζονται ισοδύναμοι, και θα γράφουμε $\varphi \equiv \psi$, αν $L(\varphi) = L(\psi)$. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε σημαντικές ιδότητες των τύπων της LTL.

Πρόταση 4.6. *Ας είναι A ένα αλφάβητο, και φ, ψ τύποι της* LTL *από το A. Ισχύουν οι σχέσεις:*

1) $\Diamond\Diamond\varphi \equiv \Diamond\varphi$
2) $\Box\Box\varphi \equiv \Box\varphi$
3) $\neg\bigcirc\varphi \equiv \bigcirc\neg\varphi$
4) $\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$
5) $\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$
6) $\Diamond\Box\Diamond\varphi \equiv \Box\Diamond\varphi$
7) $\Box\Diamond\Box\varphi \equiv \Diamond\Box\varphi$
8) $\varphi \cup (\varphi \cup \psi) \equiv \varphi \cup \psi$
9) $(\varphi \cup \psi) \cup \psi \equiv \varphi \cup \psi$
10) $\varphi \cup \psi \equiv \psi \vee (\varphi \wedge \bigcirc(\varphi \cup \psi))$
11) $\Diamond\psi \equiv \psi \vee \bigcirc\Diamond\psi$
12) $\Box\psi \equiv \psi \wedge \bigcirc\Box\psi$
13) $\bigcirc(\varphi \cup \psi) \equiv (\bigcirc\varphi) \cup (\bigcirc\psi)$
14) $\Diamond(\varphi \vee \psi) \equiv \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$
15) $\Box(\varphi \wedge \psi) \equiv \Box\varphi \wedge \Box\psi.$

Απόδειξη. Για κάθε μία από τις παραπάνω ισοδυναμίες $\Phi \equiv \Phi'$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$w \models \Phi \quad \text{ανν} \quad w \models \Phi'$$

για κάθε λέξη $w \in A^*$.
Θεωρούμε λοιπόν μια λέξη $w = w(0)\dots w(n-1) \in A^*$.

1)

$$\begin{aligned}
w \models \Diamond\Diamond\varphi \;\; & \text{ανν} \;\; \text{υπάρχει δείκτης } 0 \leq i \leq n-1 \;\; \text{τέτοιος ώστε} \;\; w_{\geq i} \models \Diamond\varphi \\
& \text{ανν} \;\; \text{υπάρχουν δείκτες } 0 \leq i \leq j \leq n-1 \;\; \text{τέτοιοι ώστε} \\
& \qquad w_{\geq i} \models \Diamond\varphi \;\; \text{και} \;\; (w_{\geq i})_{\geq j} \models \varphi \\
& \text{ανν} \;\; \text{υπάρχει δείκτης } 0 \leq i \leq n-1 \;\; \text{τέτοιος ώστε} \;\; w_{\geq i} \models \varphi \\
& \text{ανν} \;\; w \models \Diamond\varphi.
\end{aligned}$$

Μπορείτε να εξηγήσετε την τρίτη ισοδυναμία;

2)

$$\begin{aligned}
w \models \Box\Box\varphi \;\; & \text{ανν} \;\; w_{\geq i} \models \Box\varphi \;\; \text{για κάθε} \;\; 0 \leq i \leq n-1 \\
& \text{ανν} \;\; (w_{\geq i})_{\geq j} \models \varphi \;\; \text{για κάθε} \;\; 0 \leq i \leq j \leq n-1 \\
& \text{ανν} \;\; w_{\geq i} \models \varphi \;\; \text{για κάθε} \;\; 0 \leq i \leq n-1 \\
& \text{ανν} \;\; w \models \Box\varphi.
\end{aligned}$$

Μπορείτε να εξηγήσετε την τρίτη ισοδυναμία;

3)

$$\begin{aligned}
w \models \neg\bigcirc\varphi \;\; & \text{ανν} \;\; w \not\models \bigcirc\varphi \\
& \text{ανν} \;\; w_{\geq 1} \not\models \varphi \\
& \text{ανν} \;\; w_{\geq 1} \models \neg\varphi \\
& \text{ανν} \;\; w \models \bigcirc\neg\varphi.
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
w \models \neg\Diamond\varphi \;\; & \text{ανν} \;\; w \not\models \Diamond\varphi \\
& \text{ανν} \;\; w_{\geq i} \not\models \varphi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\
& \text{ανν} \;\; w_{\geq i} \models \neg\varphi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\
& \text{ανν} \;\; w \models \Box\neg\varphi.
\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
w \models \neg\Box\varphi & \equiv w \models \neg(\neg\Diamond\neg\varphi) \\
& \equiv w \not\models \neg\Diamond\neg\varphi \\
& \equiv \Diamond\neg\varphi.
\end{aligned}$$

6)

$$\begin{array}{rll} w \models \Diamond\Box\Diamond\varphi & \text{ανν} & \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models \Box\Diamond\varphi \\ & \text{ανν} & \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\ & & (w_{\geq i})_{\geq j} \models \Diamond\varphi \text{ για κάθε } i \leq j \leq n-1 \\ & \text{ανν} & \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } i \leq j \leq n-1 \\ & & \text{υπάρχει } j \leq k \text{ με } ((w_{\geq i})_{\geq j})_{\geq k} \models \varphi \\ & \text{ανν} & \text{για κάθε } 0 \leq j \leq n-1 \text{ υπάρχει } j \leq k \leq n-1 \\ & & \text{τέτοιο ώστε } (w_{\geq j})_{\geq k} \models \varphi \\ & \text{ανν} & w \models \Box\Diamond\varphi. \end{array}$$

7)

$$\begin{array}{rll} w \models \Box\Diamond\Box\varphi & \text{ανν} & w_{\geq i} \models \Diamond\Box\varphi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\ & \text{ανν} & \text{για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \text{ υπάρχει } i \leq j \\ & & \text{τέτοιο ώστε } (w_{\geq i})_{\geq j} \models \Box\varphi \\ & \text{ανν} & \text{για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \text{ υπάρχει } i \leq j \\ & & \text{τέτοιο ώστε } ((w_{\geq i})_{\geq j})_{\geq k} \models \varphi \text{ για κάθε } j \leq k \\ & \text{ανν} & \text{υπάρχει } 0 \leq j \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\ & & (w_{\geq j})_{\geq k} \models \varphi \text{ για κάθε } j \leq k \\ & \text{ανν} & \text{υπάρχει } 0 \leq j \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq j} \models \Box\varphi \\ & \text{ανν} & w \models \Diamond\Box\varphi. \end{array}$$

8)

$$\begin{array}{rll} w \models \varphi \cup (\varphi \cup \psi) & \text{ανν} & \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models \varphi \cup \psi \text{ και} \\ & & w_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 0 \leq j < i \\ & \text{ανν} & \text{υπάρχουν } 0 \leq i \leq k \leq n-1 \text{ τέτοια ώστε} \\ & & w_{\geq k} \models \psi \text{ και } w_{\geq r} \models \varphi \text{ για κάθε } i \leq r < k \text{ και} \\ & & w_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 0 \leq j < i \\ & \text{ανν} & \text{υπάρχει } 0 \leq k \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq k} \models \psi \text{ και} \\ & & w_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 0 \leq j < k \\ & \text{ανν} & w \models \varphi \cup \psi. \end{array}$$

9) Αποδεικνύεται όπως η ισοδυναμία (8).

10)

$$\begin{aligned}
w \models \varphi \cup \psi \quad & \text{ανν} \quad \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models \psi \text{ και} \\
& \qquad w_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 0 \leq j < i \\
& \text{ανν} \quad \Big(w = w_{\geq 0} \models \psi\Big) \text{ ή } \Big(\text{υπάρχει } 0 < i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\
& \qquad w_{\geq i} \models \psi \text{ και } w_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 0 \leq j < i\Big) \\
& \text{ανν} \quad \Big(w = w_{\geq 0} \models \psi\Big) \text{ ή } \Big(\text{υπάρχει } 0 < i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\
& \qquad w_{\geq i} \models \psi \text{ και } w = w_{\geq 0} \models \varphi \text{ και } w_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 1 \leq j < i\Big) \\
& \text{ανν} \quad \Big(w \models \psi\Big) \text{ ή } \Big(w \models \varphi \text{ και υπάρχει } 0 < i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\
& \qquad w_{\geq i} \models \psi \text{ και } w_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 0 < j < i\Big) \\
& \text{ανν} \quad \Big(w \models \psi\Big) \text{ ή } \Big(w \models \varphi \text{ και } w \models \bigcirc(\varphi \cup \psi)\Big) \\
& \text{ανν} \quad w \models \psi \vee (\varphi \wedge \bigcirc\varphi \cup \psi).
\end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned}
w \models \Diamond\psi \quad & \text{ανν} \quad \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models \psi \\
& \text{ανν} \quad \Big(w_{\geq 0} = w \models \psi\Big) \text{ ή υπάρχει } 0 < i \leq n-1 \\
& \qquad \text{τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models \psi \\
& \text{ανν} \quad \Big(w_{\geq 0} = w \models \psi\Big) \text{ ή υπάρχει } 1 \leq i \leq n-1 \\
& \qquad \text{τέτοιο ώστε } (w_{\geq 1})_{\geq i} \models \psi \\
& \text{ανν} \quad \Big(w \models \psi\Big) \text{ ή } \Big(w_{\geq 1} \models \Diamond\psi\Big) \\
& \text{ανν} \quad \Big(w \models \psi\Big) \text{ ή } \Big(w \models \bigcirc\Diamond\psi\Big) \\
& \text{ανν} \quad w \models \psi \vee \bigcirc\Diamond\psi.
\end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned}
w \models \Box\psi \quad & \text{ανν} \quad w_{\geq i} \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\
& \text{ανν} \quad w_{\geq 0} \models \psi \text{ και } w_{\geq i} \models \psi \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n-1 \\
& \text{ανν} \quad w_{\geq 0} \models \psi \text{ και } (w_{\geq 1})_{\geq i} \models \psi \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n-1 \\
& \text{ανν} \quad w \models \psi \text{ και } w_{\geq 1} \models \Box\psi \\
& \text{ανν} \quad w \models \psi \text{ και } w \models \bigcirc\Box\psi \\
& \text{ανν} \quad w \models \psi \wedge \bigcirc\Box\psi.
\end{aligned}$$

13)

$$\begin{aligned}
w \models \bigcirc(\varphi \cup \psi) \ &\text{ανν} \ \ w_{\geq 1} \models \varphi \cup \psi \\
&\text{ανν} \ \ \text{υπάρχει } 1 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\
&\qquad (w_{\geq 1})_{\geq i} \models \psi \text{ και } (w_{\geq 1})_{\geq j} \models \varphi \text{ για κάθε } 1 \leq j < i \\
&\text{ανν} \ \ \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\
&\qquad w_{\geq i} \models \bigcirc\psi \text{ και } w_{\geq j} \models \bigcirc\varphi \text{ για κάθε } 0 \leq j < i \\
&\text{ανν} \ \ w \models (\bigcirc\varphi) \cup (\bigcirc\psi).
\end{aligned}$$

14)

$$\begin{aligned}
w \models \Diamond(\varphi \vee \psi) \ &\text{ανν} \ \ \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq i} \models (\varphi \vee \psi) \\
&\text{ανν} \ \ \text{υπάρχει } 0 \leq i \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε} \\
&\qquad w_{\geq i} \models \varphi \text{ ή } w_{\geq i} \models \psi \\
&\text{ανν} \ \ w \models \Diamond\varphi \text{ ή } w \models \Diamond\psi \\
&\text{ανν} \ \ w \models \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi.
\end{aligned}$$

15)

$$\begin{aligned}
w \models \Box(\varphi \wedge \psi) \ &\text{ανν} \ \ w_{\geq i} \models \varphi \wedge \psi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\
&\text{ανν} \ \ w_{\geq i} \models \varphi \text{ και } w_{\geq i} \models \psi \text{ για κάθε } 0 \leq i \leq n-1 \\
&\text{ανν} \ \ \models \Box\varphi \text{ και } w \models \Box\psi \\
&\text{ανν} \ \ w \models \Box\varphi \wedge \Box\psi.
\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε με ποιό τρόπο σχετίζονται οι λογικές FO και LTL. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε την εκφραστική ισοδυναμία των προτάσεων της FO λογικής και των τύπων της LTL, δηλαδή θα δείξουμε ότι $\mathrm{FO}(A) = \mathrm{LTL}(A)$ για κάθε αλφάβητο A. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο τον εγκλεισμό $\mathrm{LTL}(A) \subseteq \mathrm{FO}(A)$, ενώ η απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, εκτός των ορίων ενός προπτυχιακού ή/και μεταπτυχιακού μαθήματος. Θα περιγράψουμε όμως τα βήματα για αυτή την απόδειξη παρακάτω, εισάγοντας με τη ευκαρία αυτή δύο ακόμη σημαντικές έννοιες, των star-free γλωσσών και των counter-free πεπερασμένων αυτομάτων. Όπως θα δούμε, για την απόδειξη του εγκλεισμού $\mathrm{FO}(A) \subseteq \mathrm{LTL}(A)$ χρειάζονται μια σειρά από άλλα σημαντικά αποτελέσματα.
Για την απόδειξη του εγκλεισμού $\mathrm{LTL}(A) \subseteq \mathrm{FO}(A)$ θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.7. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε, για κάθε τύπο φ της LTL από το A, μπορούμε να κατασκευάσουμε τύπο $\psi(x)$ της FO λογικής από το A τέτοιο ώστε*

$$w_{\geq i} \models \varphi \Longleftrightarrow (w, [x \to i]) \models \psi(x)$$

για κάθε $w \in A^*$ και $i \in \mathrm{dom}(w)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την εν λόγω ισοδυναμία με επαγωγή στη δομή του τύπου φ της LTL από το A. Ας είναι $w = w(0)\dots w(n-1)$ και $0 \leq i \leq n-1$.

- $\varphi = \text{true}$. Θέτουμε $\psi = \text{true}$.
- $\varphi = p_a$. Θέτουμε $\psi = P_a(x)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} w_{\geq i} \models p_a &\iff w_{\geq i}(0) = a \\ &\iff w(i) = a \\ &\iff (w, [x \to i]) \models P_a(x). \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\varphi'$, και ας είναι $\psi'(x)$ ο τύπος της FO λογικής από το A που αντιστοιχεί, από την υπόθεση της επαγωγής, στον τύπο φ' της LTL. Θέτουμε $\psi(x) = \neg\psi'(x)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} w_{\geq i} \models \varphi &\iff w_{\geq i} \models \neg\varphi' \\ &\iff w_{\geq i} \not\models \varphi' \\ &\iff (w, [x \to i]) \not\models \psi'(x) \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \neg\psi'(x) \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \psi(x) \end{aligned}$$

  όπου η τρίτη ισοδυναμία ισχύει απο τη υπόθεση της επαγωγής.

- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, και ας είναι $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$ οι τύποι της FO λογικής από το A που αντιστοιχούν, από την υπόθεση της επαγωγής, στους τύπους φ_1 και φ_2, αντίστοιχα της LTL. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται στον τύπο $\psi_2(y)$ (αν ανήκει την μετονομάζουμε) και αντικαθιστούμε την μεταβλητή y με την x στην $\psi_2(y)$. Τότε έχουμε

$$w_{\geq i} \models \varphi_1 \iff (w, [x \to i]) \models \psi_1(x)$$

  και

$$w_{\geq i} \models \varphi_2 \iff (w, [x \to i]) \models \psi_2(x).$$

  Θέτουμε $\psi(x) = \psi_1(x) \vee \psi_2(x)$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} w_{\geq i} \models \varphi_1 \vee \varphi_2 &\iff w_{\geq i} \models \varphi_1 \text{ ή } w_{\geq i} \models \varphi_2 \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \psi_1(x) \text{ ή } (w, [x \to i]) \models \psi_2(x) \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \psi_1(x) \vee \psi_2(x) \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \psi(x). \end{aligned}$$

- $\varphi = \bigcirc\varphi'$, και ας είναι $\psi'(y)$ ο τύπος της FO λογικής από το A, που αντιστοιχεί από την υπόθεση της επαγωγής, στον τύπο φ' της LTL. Αυτό σημαίνει οτι

$$w_{\geq i} \models \varphi' \iff (w, [y \to i]) \models \psi'(y).$$

Θέτουμε $\psi(x) = \exists y.((y = x+1) \wedge \psi'(y))$ και έχουμε

$$\begin{aligned} w_{\geq i} \models \varphi &\iff w_{\geq i} \models \bigcirc\varphi' \\ &\iff w_{\geq i+1} \models \varphi' \\ &\iff (w, [y \to i+1]) \models \psi'(y) \\ &\iff \text{ υπάρχει } i \in \mathrm{dom}(w) \text{ τέτοιο ώστε} \\ &\qquad\qquad (w, [x \to i]) \models (y = x+1) \wedge \psi'(y) \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \exists y.((y = x+1) \wedge \psi'(y)) \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \psi(x). \end{aligned}$$

– $\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2$ και ας είναι $\psi_1(y)$ και $\psi_2(z)$ οι τύποι της FO λογικής από το A, που αντιστοιχούν από την υπόθεση της επαγωγής, στους τύπους της φ_1 και φ_2 της LTL. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η μεταβλητή z δεν εμφανίζεται στην ψ_1 και η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται στη ψ_2. Θεωρούμε μια νέα μεταβλητή x που δεν εμφανίζεται ούτε στην ψ_1 ούτε στην ψ_2. Θέτουμε

$$\psi(x) = \exists z. \forall y. \big((x \leq y \wedge y < z) \to \psi_1(y) \wedge \psi_2(z)\big)$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} w_{\geq i} \models \varphi_1 \cup \varphi_2 &\iff \text{ υπάρχει } i \leq j \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } w_{\geq j} \models \varphi_2 \text{ και} \\ &\qquad\quad w_{\geq k} \models \varphi_1 \text{ για κάθε } i \leq k < j \\ &\iff \text{ υπάρχει } i \leq j \leq n-1 \text{ τέτοιο ώστε } (w, [z \to j]) \models \psi_2(z) \\ &\qquad\quad \text{και } (w, [y \to k]) \models \psi_1(y) \text{ για κάθε } i \leq k < j \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \exists z. \forall y. \big((x \leq y \wedge y < z) \to \psi_1(y) \wedge \psi_2(z)\big) \\ &\iff (w, [x \to i]) \models \psi(x). \end{aligned}$$

□

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε τη σχέση $\mathrm{LTL}(A) \subseteq \mathrm{FO}(A)$ για οποιοδήποτε αλφάβητο A.

Θεώρημα 4.8. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε ισχύει*

$$\mathrm{LTL}(A) \subseteq \mathrm{FO}(A).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε γλώσσα $L \in \mathrm{LTL}(A)$. Τότε υπάρχει τύπος φ της LTL από το A έτσι ώστε $L = L(\varphi)$. Από την Πρόταση 4.7, μπορούμε να κατασκευάσουμε τύπο $\psi(x)$ της FO λογικής από το A τέτοιο ώστε

$$w_{\geq i} \models \varphi \;\text{ ανν }\; (w, [x \to i]) \models \psi(x)$$

για κάθε $w \in A^*$ και $i \in \mathrm{dom}(w)$. Θεωρούμε την πρόταση

$$\xi = \exists x.(\mathrm{first}(x) \wedge \psi(x))$$

της FO λογικής από το A. Για κάθε $w \in A^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} w \models \varphi &\iff w_{\geq 0} \models \varphi \\ &\iff (w, [x \to 0]) \models \psi(x) \\ &\iff w \models \exists x.(\mathrm{first}(x) \wedge \psi(x)) \\ &\iff w \models \xi. \end{aligned}$$

Έτσι $L(\xi) = L(\varphi) = L$, και συνεπώς $L \in \mathrm{FO}(A)$. Συνάγουμε ότι $\mathrm{LTL}(A) \subseteq \mathrm{FO}(A)$, και η απόδειξή μας τελείωσε. $\square$

Ασκήσεις

1) Ας είναι A ένα αλφάβητο και φ, ψ τύποι της LTL από το A. Να δείξετε ότι ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία.

$$\neg(\neg\varphi \cup \neg\psi) \equiv \psi \wedge (\varphi \vee \bigcirc(\varphi \wedge \psi)).$$

2) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b\}$. Για κάθε έναν από τους παρακάτω τύπους φ της LTL από το A, να κατασκευάσετε NFA $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $L(\mathcal{A}) = L(\varphi)$.

   i) $\varphi = \Box(p_a \vee \neg\bigcirc p_b)$.

   ii) $\varphi = \bigcirc\bigcirc(p_a \vee \Diamond\Box p_b)$.

3) Ας είναι A ένα αλφάβητο και φ, ψ τύποι της LTL από το A. Να εξετάσετε αν μπορούμε να αποφασίσουμε αν ισχύει ή όχι η ισοδυναμία

$$\varphi \equiv \psi.$$

Κεφάλαιο 5

Star-free γλώσσες

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε την έννοια των star-free γλωσσών και θα τις συνδέσουμε με τις FO-ορίσιμες γλώσσες.

Ορισμός 5.1. Ας είναι A ένα αλφάβητο. Η κλάση $\mathrm{SF}(A)$ των star-free γλωσσών από το A είναι η ελάχιστη κλάση γλωσσών από το A που περιέχει τα γράμματα του A, την κενή λέξη ε, την κενή γλώσσα $\emptyset$, και είναι κλειστή με τις πράξεις της ένωσης, της παράθεσης, και του συμπληρώματος.

Η διαφορά στον παραπάνω ορισμό με αυτόν των ρητών γλωσσών, είναι ότι ''αντικαθιστούμε'' την πράξη της θήκης (star) με αυτήν του συμπληρώματος.
Στη συνέχεια θα δώσουμε παραδείγματα star-free γλωσσών.

Παράδειγμα 5.2. *Θεωρούμε το αλφάβητο $A = \{a, b\}$.*

1) *Η γλώσσα A^* είναι star-free καθώς*

$$A^* = \overline{\emptyset}.$$

2) *Η γλώσσα a^* είναι star-free καθώς*

$$a^* = \overline{A^*bA^*}$$

και η A^*bA^* είναι star-free.

3) *Η γλώσσα $(ab)^*$ είναι star-free καθώς $(ab)^* = \overline{L}$, όπου*

$$L = bA^* \cup A^*a \cup A^*aaA^* \cup A^*bbA^*$$

και η L είναι star-free.

4) *Η γλώσσα $(a \cup bab)^*$ είναι star-free καθώς $(a \cup bab)^* = \overline{L}$, όπου*

$$L = A^*b^3A^*$$

και η L είναι star-free (μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;).

Για την κλάση $\mathrm{SF}(A)$ ισχύει το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.3. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε ισχύει*

$$\mathrm{FO}(A) \subseteq \mathrm{SF}(A).$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο παραπάνω εγκλεισμός είναι στην πραγματικότητα ισότητα, δηλαδή μια γλώσσα από ένα αλφάβητο A είναι FO-ορίσιμη αν και μόνο αν είναι star-free.

Ασκήσεις

1) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b\}$. Να εξετάσετε αν η γλώσσα

$$(ab \cup ba)^*$$

είναι star-free ή όχι.

2) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b, c\}$. Να εξετάσετε αν η γλώσσα

$$(abc)^*$$

είναι star-free ή όχι.

3) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b, c, d\}$. Να εξετάσετε αν η γλώσσα

$$(abcd)^*$$

είναι star-free ή όχι.

4) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a\}$. Να εξετάσετε αν οι γλώσσες

   i) $(aa)^*$
   ii) $(aaa)^*$

   είναι star-free ή όχι.

5) Ας είναι A ένα αλφάβητο. Να δείξετε οτι

$$\mathrm{SF}(A) \subseteq \mathrm{Rat}(A).$$

6) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L, M \in \mathrm{SF}(A)$. Να εξετάσετε αν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = M$ ή όχι.

7) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L \in \mathrm{SF}(A)$. Να εξετάσετε αν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = A^*$ ή όχι.

8) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L \in \mathrm{SF}(A)$. Να εξετάστε αν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = \emptyset$ ή όχι.

Κεφάλαιο 6

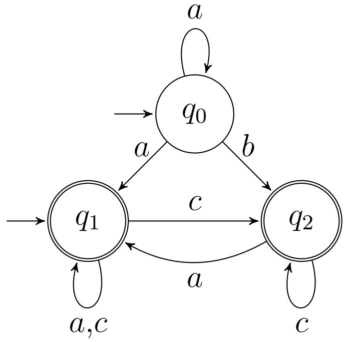
Counter-free πεπερασμένα αυτόματα

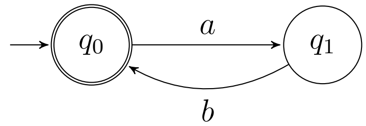
Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε το μοντέλο των counter-free πεπερασμένων αυτομάτων. Τα counter-free είναι μια ειδική περίπτωση πεπερασμένων αυτομάτων των οποίων η λειτουργία έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Όπως θα δούμε η κλάση των γλωσσών που αναγνωρίζουν είναι γνήσια υποκλάση αυτής των αναγνωρίσιμων γλωσσών.

Τα counter-free πεπερασμένα αυτόματα εισήχθησαν το 1971 [9] ως CFA (για την ακρίβεια ως DFA). Στην πορεία όμως ορίσθηκαν και ως NFA μοντέλα. Εδώ θα εισάγουμε και θα χρησιμοποιήσουμε τα counter-free NFA. Θα δείξουμε ότι από κάθε counter-free NFA μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο counter-free CFA.

Ορισμός 6.1. Ένα NFA $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, F)$ ονομάζεται counter-free NFA (σύντομα cfNFA) αν για κάθε κατάσταση $q \in Q$, λέξη $w \in A^+$, και φυσικό αριθμό $n > 0$ υπάρχει διαδρομή του $\mathcal{A}$ από την κατάσταση q στην q με την λέξη w^n, τότε θα υπάρχει διαδρομή του $\mathcal{A}$ από την κατάσταση q στην q με την λέξη w.

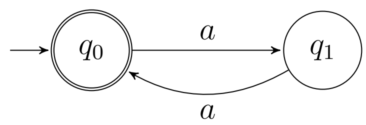
Παράδειγμα 6.2. *Τα NFA των παρακάτω σχημάτων είναι counter-free.*





Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

Παράδειγμα 6.3. *Το* NFA *του παρακάτω σχήματος δεν είναι counter-free.*



Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

Πρόταση 6.4. *[5] Για κάθε* cfNFA $\mathcal{A}$ *μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο* cfCFA $\mathcal{A}'$.

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{A} = (Q, A, I, \delta, F)$ ένα cfNFA. Ακολουθούμε την απόδειξη της Πρότασης 1.10 και κατασκευάζουμε το CFA $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}(Q), A, I, \delta', F')$ όπου η δ' ορίζεται από τη σχέση

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$$

για κάθε $P \in \mathcal{P}(Q)$, $a \in A$.
Το σύνολο των τελικών καταστάσεων είναι

$$F' = \{P \in \mathcal{P}(Q) \mid P \cap F \neq \emptyset\}.$$

Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{A}'$ είναι counter-free. Ας είναι λοιπόν κατάσταση $P \in \mathcal{P}(Q)$, λέξη $w \in A^+$, και $n > 0$ έτσι ώστε να υπάρχει διαδρομή

$$P \overset{w^n}{\rightsquigarrow} P$$

από την P στην P με την λέξη w^n, δηλαδή $\delta'^*(P, w^n) = P$. Θεωρούμε κατάσταση $p \in P$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κατάσταση $p' \in P$ τέτοια ώστε $p \in \delta^*(p', w^n)$. Το σύνολο P είναι πεπερασμένο, οπότε εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για την p', και συνεχίζοντας επαναληπτικά θα βρούμε κατάσταση $q \in P$ έτσι ώστε

$$q \overset{w^{kn}}{\rightsquigarrow} q \overset{w^{mn}}{\rightsquigarrow} p$$

για κάποια $k, m > 0$. Καθώς όμως το $\mathcal{A}$ είναι couter-free θα έχουμε

$$q \overset{w}{\rightsquigarrow} q.$$

Έτσι

$$q \rightsquigarrow q \overset{w^{mn}}{\rightsquigarrow} p$$

και συνεπώς $p \in \delta'^*(P, w^{mn+1})$. Αλλά

$$\begin{aligned} \delta'^*(P, w^{mn+1}) &= \delta'^*(\delta'^*(P, w^{mn}), w) \\ &= \delta'^*\Big(\underbrace{\delta'^*(\delta'^*(\ldots \delta'^*(\delta'^*(P, w^n), w^n)\ldots w^n), w^n)}_{m \ \text{φορές}}, w\Big) \\ &= \delta'^*(P, w) \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $p \in \delta'^*(P, w)$ και συνεπώς $P \subseteq \delta'^*(P, w)$.
Από την τελευταία σχέση έχουμε επίσης

$$\delta'^*(P, w) \subseteq \delta'^*(\delta'^*(P, w), w) \subseteq \delta'^*(P, w^2)$$

και επαγωγικά

$$\delta'^*(P, w) \subseteq \delta'^*(P, w^n) = P.$$

Συνάγουμε ότι

$$\delta'^*(P, w) = P$$

που σημαίνει ότι το $\mathcal{A}'$ είναι cfCFA, όπως το θέλαμε. □

Ορισμός 6.5. Μια γλώσσα Ł $\subseteq A^*$ θα ονομάζεται counter-free αν υπάρχει counter-free πεπερασμένο αυτόματο $\mathcal{A}$ έτσι ώστε $L = L(\mathcal{A})$. Θα συμβολίζουμε με $\mathrm{CF}(A)$ τη κλάση όλων των counetr-free γλωσσσών από το A.

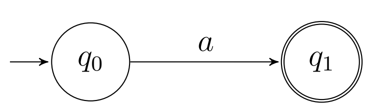
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε star-free γλώσσα από ένα αλφάβητο A είναι counter-free γλώσσα από το A.

Θεώρημα 6.6. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε ισχύει*

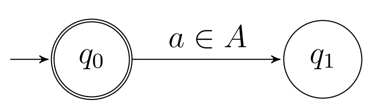
$$\mathrm{SF}(A) \subseteq \mathrm{CF}(A).$$

Απόδειξη. Καθώς η $\mathrm{SF}(A)$ είναι η ελάχιστη κλάση γλωσσών από το A που περιέχει τα γράμματα του A, την κενή λέξη ε, την κενή γλώσσα $\emptyset$, και είναι κλειστή με τις πράξεις της ένωσης, της παράθεσης, και του συμπληρώματος, αρκεί να δείξουμε ότι και η κλάση $\mathrm{CF}(A)$ περιέχει τα γράμματα του A, την κενή λέξη ε, και την κενή γλώσσα $\emptyset$ και είναι κλειστή με τις πράξεις της ένωσης, της παράθεσης, και του συμπληρώματος.

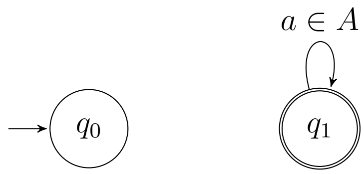
Το NFA



αναγνωρίζει το γράμμα a, για κάθε γράμμα $a \in A$, ενώ τα NFA



και



αναγνωρίζουν αντίστοιχα την κενή λέξη ε και την κενή γλώσσα $\emptyset$. Προφανώς και τα τρία NFA είναι counter-free, συνεπώς $a \in \mathrm{CF}(A)$ για κάθε $a \in A$, και $\varepsilon, \emptyset \in \mathrm{CF}(A)$.

Ας είναι τώρα $L_1, L_2 \in \mathrm{CF}(A)$. Τότε υπάρχουν cfNFA $\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, I_1, \Delta_1, F_1)$ και $\mathcal{A}_2 = (Q_2, A, I_2, \Delta_2, F_2)$ τέτοια ώστε $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ και $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

i) *Ένωση:*
Κατασκευάζουμε το NFA $\mathcal{A} = (Q_1 \cup Q_2, A, I_1 \cup I_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, F_1 \cup F_2)$ για το οποίο ισχύει $L(\mathcal{A}) = L_1 \cup \text{Ł}_2$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). Ας είναι τώρα $q \in Q_1 \cup Q_2$, $w \in A^+$, και $n > 0$ τέτοια ώστε

$$q \overset{w^n}{\rightsquigarrow} q.$$

Καθώς $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, και $\Delta_1 \subseteq Q_1 \times A \times Q_1$, $\Delta_2 \subseteq Q_2 \times A \times Q_2$, είναι εύκολο να δούμε ότι αν $q \in Q_1$ (αντίστοχα $q \in Q_2$) τότε όλες οι καταστάσεις της παραπάνω διαδρομής θα ανήκουν στο Q_1 (αντίστοιχα στο Q_2). Καθώς το $\mathcal{A}_1$ (αντίστοιχα το $\mathcal{A}_2$) είναι counter-free συμπεραίνουμε ότι

$$q \overset{w}{\rightsquigarrow} q$$

που σημαίνει ότι το $\mathcal{A}$ είναι counter-free. Έτσι $L_1 \cup L_2 \in \mathrm{CF}(A)$.

ii) *Παράθεση:*
Από τα cfNFA $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ κατασκευάζουμε ([14] Κεφ. 5, Πρόταση 10), τα κανονικοποιημένα NFA $\mathcal{A}_1' = \left(Q_1 \cup \{q_{in}^{(1)}, q_{ter}^{(1)}\}, A, q_{in}^{(1)}, \Delta_1', q_{ter}^{(1)}\right)$ και $\mathcal{A}_2' = \left(Q_2 \cup \{q_{in}^{(2)}, q_{ter}^{(2)}\}, A, q_{in}^{(2)}, \Delta_2', q_{ter}^{(2)}\right)$ που αναγνωρίζουν τις $L_1 \setminus \{\varepsilon\}$ και $L_2 \setminus \{\varepsilon\}$, αντίστοιχα. Από την κατασκευή τους τα $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ είναι counter-free (η αυστηρή απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). Από τα $\mathcal{A}_1'$ και $\mathcal{A}_2'$ κατασκευάζουμε ([14] Κεφ. 5, Πρόταση 11) το κανονικοποιημένο NFA $\mathcal{B} = \left(Q_{\mathcal{B}}, A, q_{in}^{(1)}, \Delta_{\mathcal{B}}, q_{ter}^{(2)}\right)$, με $Q_{\mathcal{B}} = ((Q_1 \cup \{q_{in}^{(1)}\}) \setminus \{q_{ter}^{(1)}\}) \cup Q_2 \cup \{q_{in}^{(2)}, q_{ter}^{(2)}\}$ που αναγνωρίζει τη γλώσσα $(L_1 \setminus \{\varepsilon\})(L_2 \setminus \{\varepsilon\})$. Από την κατασκευή του $\mathcal{B}$ προκύπτει άμεσα ότι αν $q \in Q_{\mathcal{B}}$, $w \in A^+$, και $n > 0$, έτσι ώστε

$$q \overset{w^n}{\rightsquigarrow} q,$$

τότε όλες οι καταστάσεις στην διαδρομή αυτή ανήκουν είτε στο Q_1 είτε στο Q_2. Αυτό σημαίνει ότι

$$q \overset{w}{\rightsquigarrow} q$$

και συνεπώς το NFA $\mathcal{B}$ είναι counter-free. Άρα $(L_1 \setminus \{\varepsilon\})(L_2 \setminus \{\varepsilon\}) \in \mathrm{CF}(A)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $\varepsilon \notin L_1 \cup L_2$. Τότε $L_1 = L_1 \setminus \{\varepsilon\}$ και $L_2 = L_2 \setminus \{\varepsilon\}$, και με οτι δείξαμε προηγουμένως $L_1 L_2 \in \mathrm{CF}(A)$.
2) $\varepsilon \in L_1$ και $\varepsilon \notin L_2$. Τότε έχουμε $L_1 = L_1 \setminus \{\varepsilon\}$ και $L_2 = (L_2 \setminus \{\varepsilon\}) \cup \{\varepsilon\}$ οπότε

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= (L_1 \setminus \{\varepsilon\})(L_2 \setminus \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\}) \\ &= (L_1 \setminus \{\varepsilon\})(L_2 \setminus \{\varepsilon\}) \cup L_1 \setminus \{\varepsilon\}. \end{aligned}$$

   Από τα προηγούμενα, και καθώς η κλάση $\mathrm{CF}(A)$ είναι κλειστή με την πράξη της ένωσης, συνάγουμε πάλι ότι $L_1 L_2 \in \mathrm{CF}(A)$.
3) $\varepsilon \notin L_1$ και $\varepsilon \in L_2$. Όμοια, όπως στην περίπτωση (2), αποδεικνύουμε ότι $L_1 L_2 \in \mathrm{CF}(A)$.
4) $\varepsilon \in L_1 \cap L_2$. Τότε

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= (L_1 \setminus \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\})(L_2 \setminus \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\}) \\ &= (L_1 \setminus \{\varepsilon\})(L_2 \setminus \{\varepsilon\}) \cup L_1 \setminus \{\varepsilon\} \cup L_2 \setminus \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\}. \end{aligned}$$

   Από τα παραπάνω, και τον ορισμό της κλάσης $\mathrm{CF}(A)$ συνάγουμε πάλι ότι $L_1 L_2 \in \mathrm{CF}(A)$.

iii) *Συμπλήρωμα:*
Από το cfNFA $\mathcal{A}_1$ κατασκευάζουμε το ισοδύναμο cfCFA $\mathcal{A}_1' = (\mathcal{P}(Q_1), A, I_1, \Delta_1', F_1')$ (Πρόταση 6.4). Στη συνέχεια, από το $\mathcal{A}_1'$, κατασκευάζουμε το CFA $\overline{\mathcal{A}_1'} = (\mathcal{P}(Q_1), A, I_1, \Delta_1', \mathcal{P}(Q_1) \setminus F_1')$ για το οποίο ισχύει ([14] Κεφ. 4, Πρόταση 5)

$$L(\overline{\mathcal{A}_1'}) = \overline{L_1}.$$

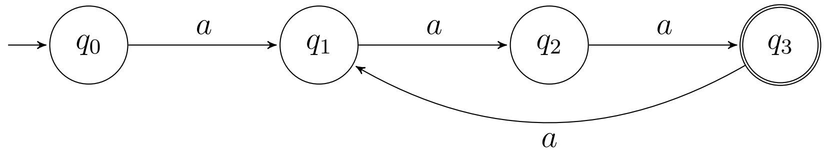
Από την κατασκευή του το CFA $\overline{\mathcal{A}_1'}$ είναι προφανώς counter-free και αυτό σημαίνει ότι $\overline{L_1} \in \mathrm{CF}(A)$.

□

Φανερά κάθε cfNFA είναι NFA και συνεπώς

$$\mathrm{CF}(A) \subseteq \mathrm{Rec}(A)$$

για κάθε αλφάβητο A. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα θεωρούμε το αλφάβητο $A = \{a\}$ και τη γλώσσα $L = (aaa)^+$ από το A. Η $L \in \mathrm{Rec}(A)$. Πράγματι είναι εύκολο να δούμε ότι η L αναγνωρίζεται από το CFA του παρακάτω σχήματος.



Ισχυριζόμαστε ότι η L δεν είναι counter-free. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $L \in \mathrm{CF}(A)$. Τότε υπάρχει cfCFA $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \Delta, F)$ τέτοιο ώστε $L = L(\mathcal{A})$. Καθώς $aaa \in L$ θα υπάρχει τελική κατάσταση $q_1 \in F$ έτσι ώστε

$$q_0 \overset{aaa}{\rightsquigarrow} q_1.$$

Αλλά και η $(aaa)^2 \in L$, συνεπώς θα υπάρχει $q_2 \in F$ έτσι ώστε

$$q_0 \overset{aaa}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{aaa}{\rightsquigarrow} q_2.$$

Όμοια και η $(aaa)^3 \in L$, συνεπώς θα υπάρχει κατάσταση $q_3 \in F$ έτσι ώστε

$$q_0 \overset{aaa}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{aaa}{\rightsquigarrow} q_2 \overset{aaa}{\rightsquigarrow} q_3.$$

Συνεχίζοντας, και καθώς το F είναι πεπερασμένο, συνάγουμε ότι θα υπάρχει κατάσταση $q \in F$ και φυσικοί αριθμοί $n, m > 0$ έτσι ώστε

$$q_0 \overset{(aaa)^n}{\rightsquigarrow} q \overset{(aaa)^m}{\rightsquigarrow} q.$$

Καθώς το $\mathcal{A}$ είναι counter-free θα ισχύει

$$q \overset{a}{\rightsquigarrow} q.$$

Συνοψίζοντας, θα έχουμε

$$q_0 \overset{(aaa)^n}{\rightsquigarrow} q \overset{(aaa)^m}{\rightsquigarrow} q \overset{a}{\rightsquigarrow} q.$$

Έτσι η λέξη $(aaa)^{n+m}a \in L$, που είναι άτοπο.

Από τα Θεωρήματα 4.8, 5.3, 6.6 συνάγουμε οτι

Πόρισμα 6.7. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε ισχύει*

$$\mathrm{LTL}(A) \subseteq \mathrm{FO}(A) \subseteq \mathrm{SF}(A) \subseteq \mathrm{CF}(A).$$

Παραθέτουμε τέλος χωρίς απόδειξη το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.8. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε ισχύει*

$$\mathrm{CF}(A) \subseteq \mathrm{LTL}(A).$$

Από τα Θεωρήματα 6.7 και 6.8 προκύπτει άμεσα το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.9. *Ας είναι A ένα αλφάβητο. Τότε ισχύει*

$$\mathrm{LTL}(A) = \mathrm{FO}(A) = \mathrm{SF}(A) = \mathrm{CF}(A).$$

Ασκήσεις

1) Δίνεται αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$. Να εξετάσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες είναι counter-free ή όχι.

   i) $L = d(ab)^+c$,

   ii) $L = cda(bda)^*c^2$,

   iii) $L = a^*b^*$,

   iv) $L = a^*b^*c^*$,

   v) $L = ca^*b^*$,

   vi) $L = (ccc)^+$,

   vii) $L = a(ccc)^+$,

   ix) $L = a(ccc)^+b$,

   x) $L = a(ccc)^+bf$.

2) Δίνεται το αλφάβητο $A = \{a, b, c, d, f\}$. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις φ, της FO λογικής, να κατασκευάσετε cfNFA $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $L(\mathcal{A}) = L(\varphi)$.

   i) $w \models \exists x.\exists y.(P_a(x) \wedge P_c(y) \wedge (x \leq y))$

   ii) $\varphi = \exists x.(P_c(x) \wedge \forall y.(x \leq y))$

   iii) $\varphi = \exists x.\exists y.(P_a(x) \wedge P_c(y) \wedge \forall z.((x \leq z) \wedge (z \leq y)))$

   iv) $\varphi = \exists x.(P_b(x) \wedge \exists y.(P_c(y) \wedge (y = x + 1)) \wedge \forall z.(x \leq z))$

3) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L, M \in \mathrm{CF}(A)$. Να εξετάσετε αν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = M$ ή όχι.

4) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L \in \mathrm{CF}(A)$. Να εξετάσετε αν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = A^*$ ή όχι.

5) Ας είναι A ένα αλφάβητο και $L \in \mathrm{CF}(A)$. Να εξετάστε αν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $L = \emptyset$ ή όχι.

Βιβλιογραφία

[1] C. Baier, J. Katoen, *Principles of Model Checking*. MIT Press, 2008.

[2] J.R. Büchi, Weak second-order arithmetic and finite automata, *Z. Math. Logik Grundlager Math.* 6(1960) 66–92.

[3] M.E. Clarke, M. Edmund, O. Grumberg, D. Peled, *Model Checking*. The MIT Press, 1999.

[4] E.M. Clarke, T.A. Henzinger, H. Veith, R. Bloem, eds, *Handbook of Model Checking*. Springer 2018. doi:10.1007/978-3-319-10575-8

[5] V. Diekert, P. Gastin, First-order definable languages, in: J. Flum, E. Grädel, T. Wilke, eds, *Logic and Automata: History and Perspectives in Honor of Wolfgang Thomas*, Texts in Logic and Games vol.2, pp. 261–306. Amsterdam University Press 2008.

[6] C. Elgot, Decision problems of finite automata design and related arithmetics, *Trans. Amer. Math. Soc.* 98(1961) 21–52. doi:10.1090/S0002-9947-1961-0139530-9

[7] B. Khoussainov, A. Nerode, *Automata Theory and its Applications,* Birkhäuser Boston, 2001. doi:10.1007/978-1-4612-0171-7

[8] O. Kupferman, Automata Theory and Model Checking, in: [4], pp. 107–151.

[9] R. McNaughton S. Papert, *Counter-free automata*. The M.I.T. Press, Cambridge Mass.-London, 1971.

[10] J. Sakarovitch, *Elements of Automata Theory*. Cambridge University Press, 2009.

[11] W. Thomas, Languages, automata and logic, in: *Handbook of Formal Languages, vol. 3,* (G. Rozenberg, A. Salomaa, eds.), Springer, 1997, pp.389–485. doi:10.1007/978-3-642-59126-6

[12] B. Trakhtenbrot, Finite automata and the logic of single-place predicates (in Russian , *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 140(1961) 326–329, translation in *Soviet Physics Dokl.* 6(1961) 753-–75.5

[13] https://amturing.acm.org/byyear.cfm

[14] Γ. Ραχώνης, *Θεωρητική Πληροφορική Ι, Σημειώσεις*, Θεσσαλονίκη 2024. https://users.auth.gr/grahonis/Rahonis_TCS_notes_2024.pdf